Momentgenererande funktioner

Def: Den momentgenererande funktionen (mgf) av en s.v. X betecknas $M_X(t)$ och def. av

$\mathbb{E}$ $$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{Xt}],$$ för de t s.a. väntevärdet är ändligt.

Anm: 1/ Vi får att

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f_X(x)\,dx$$ om X kont. och

$$M_X(t) = \sum_{x_j} e^{x_j t} \mathbb{P}(X = x_j)$$ om X diskret.

2/ Antag X kont. Vi får att

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f_X(x)\,dx \overset{(!?)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} e^{xt} f_X(x)\,dx$$

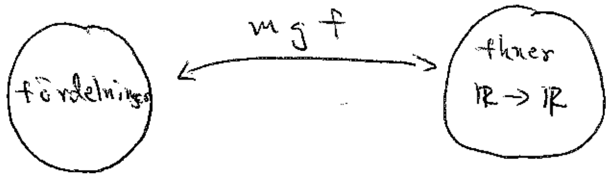
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{xt} f_X(x)\,dx \Rightarrow M_X'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[X].$$

p.s.s. $$M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$$ "n:te momentet av X"

Sats: Om $M_X(t)$ existerar för alla t i ett öppet intervall runt 0 så bestämmer detta slf / tfkn / fördelningen av X.

Anm: I själva verket är mgf en <u>transform</u>

"Fourier, Laplace"



Satsen säger att transformen är <u>inverterbar</u>.

Tal: Hitta mgf för $X_1 \sim Poi(\lambda_1)$.

L: Vi har att

$$M_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{X_1 t}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

//

Sats: Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende gäller

att
$$M_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t).$$

B: Vi har att

$$M_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X_1 + \cdots + X_n)}] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_k}] = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t). \quad \square$$

ober.

Tal: Låt $X_1 \sim Poi(\lambda_1)$ och $X_2 \sim Poi(\lambda_2)$ vara oberoende s.v.

Hitta fördelningen för $X_1 + X_2$.

L: Metod 1: Beräkna $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k)$ $\forall k$.

Metod 2: Hitta mgf för $X_1 + X_2$:

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)}$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}, \implies X_1 + X_2 \sim Poi(\lambda_1+\lambda_2).$$

Sats: Om X har mgf $M_X(t)$ och $Y = a + bX$

$$\implies M_Y(t) = e^{at} M_X(bt).$$

B: $M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{Yt}] = \mathbb{E}[e^{(a+bX)t}] = \mathbb{E}[e^{at} e^{bXt}]$

$$= e^{at}\,\mathbb{E}[e^{X(bt)}] = e^{at} M_X(bt) \quad \square$$

Tal: Låt $X \sim N(0,1)$ & $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Hitta deras mgf.

L: $$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx} e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= \left\{ \frac{x^2}{2} - tx = \frac{1}{2}(x-t)^2 - \frac{t^2}{2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2/2} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds = e^{t^2/2}$$

Enligt tidigare föreläsning är

$Y = \mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Vi får att

$$M_Y(t) = e^{\mu t} M_X(\sigma t) = e^{\mu t} e^{(\sigma t)^2/2} \quad //$$

<u>Def:</u> För två s.v. (X, Y) def. vi deras gemensamma mgf som

$$M_{XY}(s,t) = \mathbb{E}[e^{sX + tY}].$$

Vi får att $M_X(s) = M_{XY}(s,0)$.

<u>Anm:</u> Man kan visa att X, Y oberoende

$\Leftrightarrow$ $M_{XY}(s,t) = M_X(s) M_Y(t)$

<u>Tal:</u> Hitta mgf för $X \sim Bin(n,p)$

<u>L:</u> Låt $X_k = \begin{cases} 1 & \text{om försök } k \text{ lyckat} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

dvs låt $X_1, \dots, X_n$ vara i.i.d. $Bern(p)$.

Vi har att $X = X_1 + \dots + X_n$ så att

$$M_X(t) = M_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t) = [M_{X_1}(t)]^n$$

Vidare är $M_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{X_1 t}] = e^t P(X_1 = 1) + e^0 P(X_1 = 0)$

$$= pe^t + 1 - p$$

Vi får att $M_X(t) = (pe^t + 1-p)^n$ //

<u>Mgf i olikheter</u>

Vi har att om $X \geq 0$ och $a > 0$

$$P(X \geq a) = P(e^{tX} \geq e^{ta}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Markov}}}{\leq} \frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}} = e^{-ta} M_X(t)$$

<u>Tal:</u> Låt $X \sim Bin(n,p)$. Hitta en <u>bra</u> övre begränsning på $P(X \geq np(1+\varepsilon))$

<u>L:</u> Vi har att

$$P(X \geq np(1+\varepsilon)) \leq e^{-tnp(1+\varepsilon)} M_X(t)$$

$$= e^{-tnp(1+\varepsilon)} (pe^t + 1 - p)^n = e^{-tnp(1+\varepsilon)} (1 + p(e^t - 1))^n$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1+x \leq e^x \;\; \forall x}}{\leq} e^{-tnp(1+\varepsilon)} (e^{p(e^t-1)})^n = e^{np(e^t - 1 - t(1+\varepsilon))}$$

Vidare är $e^t \leq 1 + (1 + \frac{\varepsilon}{2})t$

$\forall \; t \leq \log(1 + \frac{\varepsilon}{2})$. För ett sådant val av t blir

$$\mathbb{P}(X \geq np(1+\varepsilon)) \leq e^{np(e^t - 1 - t(1+\varepsilon))}$$

$$\leq e^{np(1 + (1+\frac{\varepsilon}{2})t - 1 - t(1+\varepsilon))} = e^{-np\frac{\varepsilon}{2}t}$$

$$= \{t = \log(1+\tfrac{\varepsilon}{2})\} = (1+\tfrac{\varepsilon}{2})^{-np\frac{\varepsilon}{2}}$$

dvs exponentiellt litet i n. //

Anm: Innan hade vi mha Chebyshev och $p = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{3}{n}$, nu har vi att $(p = \frac{1}{4}, \varepsilon = 1)$

$$\mathbb{P}(X \geq \tfrac{n}{2}) \leq \left(\tfrac{3}{2}\right)^{-n/8}$$

Tal: Maria har $n = 10^{20}$ klyvbara kärnor som sönderfaller oberoende av varandra. Uppskatta sann. att proportionen som sönderfallit vid tiden $t_{1/2}$ avviker från hälften med mer än 10^{-9}.

1: Låt $X = \#$ sönderfallit vid tiden $t_{1/2}$.

Då är $X \sim Bin(10^{20}, \frac{1}{2})$. Vi söker

$$\mathbb{P}(|\tfrac{X}{n} - \tfrac{1}{2}| > 10^{-9}) = \mathbb{P}(|X - \tfrac{n}{2}| > 10^{-9} n)$$

$$= 2\mathbb{P}(X - \tfrac{n}{2} > 10^{-9} n) = 2\,\mathbb{P}(X > \tfrac{n}{2}(1 + 2\cdot 10^{-9}))$$

$$\leq 2(1 + 10^{-9})^{-\frac{10^{11}}{2}} \approx 3{,}86 \cdot 10^{-22}$$

"D.v.s. sann. att prop. avviker med mer än en på miljarden är $\sim 10^{-22}$

Halveringstid!