5.7) Antag att $\bar{X}_n \xrightarrow{P} c$ och att g är en kont. fkn. Visa att $g(\bar{X}_n) \xrightarrow{P} g(c)$.

$\boxed{R5}$ (1)

B: Vi skall visa att $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|g(\bar{X}_n) - g(c)| > \varepsilon) \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

Då g är kont. gäller att $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$ s.a. $|g(x) - g(c)| \leq \varepsilon$ $\forall\ x$ s.a. $|x - c| \leq \delta$. Dvs om $|\bar{X}_n - c| \leq \delta$

$\Rightarrow$ $|g(\bar{X}_n) - g(c)| \leq \varepsilon$ alt

$$\{|g(\bar{X}_n) - g(c)| > \varepsilon\} \subset \{|\bar{X}_n - c| > \delta\}$$

s.a.

$$\mathbb{P}(|g(\bar{X}_n) - g(c)| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|\bar{X}_n - c| > \delta) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ty $\bar{X}_n \xrightarrow{P} c$. $\square$

5.12 Ett avrundningsfel representeras av en likf. s.v. på $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (öresavrundning).

Om 100 sådana fel adderas, beräkna (approximativt) a) sann. att felet överstiger 1

b) " " " " 2

c) " " " " 5.

L: Fel nr. $k = U_k$ och $U_k \sim U[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Vi antar oberoende och betraktar

$$X = \sum_{k=1}^{100} U_k = \text{totala felet.}$$

CLT säger att $X \approx N(\mathbb{E}[X], \mathrm{Var}(X))$

där $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{100} \mathbb{E}[U_k] = 0$ och

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{100} U_k\right) = 100\,\mathrm{Var}(U_1) = 100\,\mathbb{E}[U_1^2]$$

$$= 100 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^2\,du = 100\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{100}{12}$$

s.a. $X \approx N(0, \frac{100}{12})$.

Vi söker $\mathbb{P}(X > \gamma) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{\sqrt{\frac{100}{12}}} > \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{100}{12}}}\right)$

$$\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{12}\,\gamma}{10}\right)$$

a) $r=1$ $\quad \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{12}}{10}\right) \approx \mathbb{P}(Z \geq 0.3464) \approx 0.3645$

b) $r=2$ $\quad \mathbb{P}\left(Z \geq 2\frac{\sqrt{12}}{10}\right) \approx \mathbb{P}(Z \geq 0.6928) \approx 0.244$

c) $r=5$ $\quad \mathbb{P}\left(Z \geq 5\frac{\sqrt{12}}{10}\right) \approx \mathbb{P}(Z \geq 1.732) \approx 0.042$

5.29 Låt $U_1, U_2, \ldots, U_n$ vara iid $U[0,1]$ och låt

$$U_{(n)} = \max(U_1, U_2, \ldots, U_n).$$

Hitta fthn för $U_{(n)}$ och en standardiserad $U_{(n)}$. Visa att den senare har ett gränsvärde.

1:

$$F_{U_{(n)}}(x) = \mathbb{P}(U_{(n)} \leq x) = \mathbb{P}(\max(U_1, \ldots, U_n) \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(U_1 \leq x, U_2 \leq x, \ldots, U_n \leq x) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(U_k \leq x)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ x^n & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$$

Låt $\quad Z_n = n(U_{(n)} - 1) \quad$ vara den standardiserade versionen. Vi har att

$Z_n \leq 0$ s. a. för

$$\mathbb{P}(Z_n \leq z) = \mathbb{P}(n(U_{(n)}-1) \leq z) = \mathbb{P}\left(U_{(n)} \leq 1+\frac{z}{n}\right)$$

$$= \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \longrightarrow e^z \text{ då } n\to\infty.$$

" ~~Massa vid z=-1~~ !" Fel i facit!

$\boxed{7.4}$ Vi har två populationer med standardavvikelser σ_1 resp. $\sigma_2=2\sigma_1$. Vi tar stickprov av storlek n_1 resp. $n_2=2n_1$.

För vilket stickprov blir skattningen av pop.-medlet bäst?

1: Låt X, Y beteckna respektive stickprov. Vi har att

$$Var(\overline{X}_{n_1}) = Var\left(\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1} X_k\right) = \frac{1}{n_1^2}\, n_1\sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}$$

medans

$$Var(\overline{Y}_{n_2}) = \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{(2\sigma_1)^2}{2n_1} = 2\,\frac{\sigma_1^2}{n_1}$$