$\boxed{R6}$ (1)

8.8| Antal hopp mellan flygningar ges av följande tabell:

# hopp	# fåglar
1	48
2	31
3	20
4	9
5	6
6	5
7	4
8	2
9	1
10	1
11	2
12	1

Antag att X_k = # hopp för fågel $k \sim Geom(p)$.

a) skatta p

1: Om $X_k \sim Geom(p)$ gäller att $E[X_k] = \frac{1}{p}$.

MME ger då att $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}_n}$. Data ($n = 130$)

ger $\bar{x}_n = \frac{48 + 2\cdot 31 + 3\cdot 20 + \dots + 12\cdot 1}{130} = \frac{363}{130}$

s.a. $\hat{p}(x) = \frac{130}{363}$ //

R6 2

b) Hitta ett 95 % K.I. för p.

1: Vi har att $\bar{X}_n \approx N(\mathbb{E}[\bar{X}_n], Var(\bar{X}_n))$.

Vidare är $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{p}$ och

$$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-p}{np^2} \approx \frac{1-\hat{p}}{n\hat{p}^2} = s^2_{\bar{X}}$$

s.a. $\bar{X}_n \approx N\left(\frac{1}{p}, \frac{1-\hat{p}}{n\hat{p}^2}\right) = N\left(\frac{1}{p}, s^2_{\bar{X}}\right)$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(-1.96 \le Z \le 1.96) \approx \mathbb{P}\left(-1.96 \le \frac{\bar{X}_n - \frac{1}{p}}{s_{\bar{X}}} \le 1.96\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - 1.96\cdot s_{\bar{X}} \le \frac{1}{p} \le \bar{X}_n + 1.96\cdot s_{\bar{X}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\bar{X}_n + 1.96\cdot s_{\bar{X}}} \le p \le \frac{1}{\bar{X}_n - 1.96\cdot s_{\bar{X}}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_p = \left[\frac{1}{\bar{x}_n + 1.96\cdot 0.196}, \frac{1}{\bar{x}_n - 1.96\cdot 0.196}\right]$$

$$\approx [0.315, 0.415]$$

8.18 $X_1, X_2, \ldots$ iid på $[0,1]$ med tthn

$$f(x|\alpha) = \frac{\Gamma(3\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)} x^{\alpha-1}(1-x)^{2\alpha-1} \quad \text{där } \alpha > 0.$$

Vi har att $\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{3}$, $Var(X_1) = \frac{2}{9(3\alpha+1)}$

TMA 321

R6 (3)

a) Hitta MME för α.

1: Vi har att $\mathbb{E}[X_1^2] = Var(X_1) + \mathbb{E}[X_1]^2$

$$= \frac{2}{9(3\alpha+1)} + \frac{1}{9}.$$

Momentmetoden säger då att

$$\overline{X_n^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3\hat{\alpha}+1} + 1\right) \Rightarrow -1 + 9\overline{X_n^2} = \frac{2}{3\hat{\alpha}+1}$$

$$\Rightarrow 3\hat{\alpha}+1 = \frac{2}{-1+9\overline{X_n^2}} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{-1+9\overline{X_n^2}} - 1\right)$$

b) Vilken ekvation satisfierar MLE'n för α?

2: Vi har att

$$lik(\alpha) = \prod_{k=1}^{n} f(X_k|\alpha) = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\Gamma(3\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)}}_{=\gamma(\alpha)} X_k^{\alpha-1}(1-X_k)^{2\alpha-1}$$

$$= \gamma(\alpha)^n \left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)^{\alpha-1} \left(\prod_{k=1}^{n}(1-X_k)\right)^{2\alpha-1}$$

$$\Rightarrow l(\alpha) = \log lik(\alpha) =$$

$$= n \log\gamma(\alpha) + (\alpha-1)\sum_{k=1}^{n} \log X_k + (2\alpha-1)\sum_{k=1}^{n}\log(1-X_k)$$

$$\Rightarrow l'(\alpha) = n \cdot \frac{\gamma'(\alpha)}{\gamma(\alpha)} + \sum_{k=1}^{n} \log X_k + 2\sum_{k=1}^{n}\log(1-X_k) = 0$$

8.27 | Några elektriska komponenter har livslängder som är $Exp(1/\tau)$-fördelade. R6 4

Fem komponenter testas samtidigt, och den första går sönder efter 100 dagar varefter testet avbryts.

a) Vad blir likelihood-funktionen för τ?

L: Vi har T_k = livslängd komp. $k \sim Exp(1/\tau)$

som har tthn $\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$ $t>0$.

Låt $T = \min(T_1, \dots, T_5) \underset{\text{hint}}{\sim} Exp(5/\tau)$

"par. för T_1 = par. för T delat på 5"

Vi söker då

$$lik(\tau) = f_T(t \mid \tau) \overset{\downarrow}{=} f_{T_1}(t \mid \tau/5) = \frac{5}{\tau} e^{-5t/\tau} \quad t>0$$

b) Vad blir MLE'n för τ?

L: $lik(\tau) = \frac{5}{\tau} e^{-5T/\tau}$ s.a.

$$\frac{d}{d\tau} lik(\tau) = -\frac{5}{\tau^2} e^{-5T/\tau} + \frac{5}{\tau}\left(\frac{5T}{\tau^2}\right) e^{-5T/\tau} = 0$$

$\Rightarrow \quad -1 + \frac{5T}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 5T$ s.a. vår

MLE $\hat{\tau} = 5T$

$\boxed{R6}$ 5

alt: $l(\tau) = \log 5 - \log \tau - \frac{5T}{\tau} \Rightarrow l'(\tau) = \frac{-1}{\tau} + \frac{5T}{\tau^2} = 0$

$\Rightarrow \tau = 5T$ och $l''(\tau) = \frac{1}{\tau^2} - \frac{5T}{\tau^3} = \{\tau = 5T\} = -\frac{1}{(5T)^2} < 0$

$\Rightarrow$ maximum! //

c) Vilken fördelning har $\hat{\tau} = 5T$?

L: $T \sim Exp(5/\tau)$ och tidigare räkning

ger $\alpha T \sim Exp(\frac{5}{\tau} \cdot \frac{1}{\alpha})$ s.a. $\hat{\tau} = 5T \sim Exp(1/\tau)$ //

d) Vad är $\sigma_{\hat{\tau}}$?

L: $Var(\hat{\tau}) = \frac{1}{(1/\tau)^2} = \tau^2 \Rightarrow \sigma_{\hat{\tau}} = \tau$ //

8.57 $X_1, \ldots, X_n$ är iid normal. Använd att

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad \text{och att} \quad \mathbb{E}[X] = r,$$

$Var(X) = 2r$ om $X \sim \chi^2_r$, för att lösa följ. uppg.

a) Vilken av $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ o $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

är VVR?

L: $\mathbb{E}\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = \frac{(n-1)}{\sigma^2} \mathbb{E}[S^2]$ och $\mathbb{E}\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = n-1$

TMA 321

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$ så VVR.

Vi får att $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \mathbb{E}\left[\frac{n-1}{n} S^2\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ så

ej VVR

b) Vilken har minst MSE?

1: Vi söker

$$\mathbb{E}\left[(S^2-\sigma^2)^2\right] = \sigma^4 \mathbb{E}\left[\left(\frac{S^2}{\sigma^2}-1\right)^2\right]$$

$$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\mathbb{E}\left[\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}-(n-1)\right)^2\right] = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

och

$$\mathbb{E}\left[(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{n-1}{n}S^2-\sigma^2\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\mathbb{E}\left[\left(S^2-\frac{n}{n-1}\sigma^2\right)^2\right] = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\mathbb{E}\left[\left(S^2-\sigma^2+\sigma^2-\frac{n}{n-1}\sigma^2\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\underbrace{\mathbb{E}\left[(S^2-\sigma^2)^2\right]}_{=\frac{2\sigma^4}{n-1}} + \left(\sigma^2-\frac{n}{n-1}\sigma^2\right)^2 + 2\underbrace{\mathbb{E}\left[(S^2-\sigma^2)\left(\sigma^2-\frac{n}{n-1}\sigma^2\right)\right]}_{=0}\right)$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{2\sigma^4}{n-1} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sigma^4\left(1-\frac{n}{n-1}\right)^2$$

$$= \frac{(n-1)2\sigma^4}{n^2} + \frac{\sigma^4}{n^2} = \frac{2\sigma^4}{n} - \frac{\sigma^4}{n^2} < \frac{2\sigma^4}{n} < \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

så MSE för $\hat{\sigma}^2$ är minst, //