Hypotestest

Modell:

Vi har en noll-hypotes (rådande paradigm/grundantagande) som vi betecknar H_0.

Mot denna ställs en (ny) alternativ hypotes betecknad H_A eller H_1.

Ex1: Singla slant och låt p = sann. att få T. Vi har

$H_0: p = \frac{1}{2}$

$H_1: p > \frac{1}{2}$ (manipulerad slant)

Ex2: Aspirin/hjärt-attack

H_0: Aspirin inverkar ~~ej~~ på förekomsten av h-a.

H_1: " förebygger " " " "

Anm: Bevisbördan ligger naturligt på H_1.

Terminologi ("viktigt för vet. artiklar")

1/ Om vi förkastar H_0 när H_0 är sann gör vi ett typ I fel.

2/ Vi låter α vara sann. för ett typ I fel, dvs $\alpha = \mathbb{P}(\text{förk. } H_0 \mid H_0 \text{ sann})$. α kallas för <u>signifikansnivån</u>

3/ Att acceptera H_0 då H_0 är falsk kallas ett typ II fel och vi låter

$$\beta = \mathbb{P}(\text{acc. } H_0 \mid H_0 \text{ falsk})$$

4/ <u>Styrkan</u> (kraften) hos ett test ges av $1-\beta = \mathbb{P}(\text{förk. } H_0 \mid H_0 \text{ falsk})$

<u>Anm:</u> H_0 och H_1 behöver ej vara komplement. Dvs H_0 falsk $\neq$ H_1 sann. (i allmänhet)

<u>Def:</u> En test-statistika är en funktion av datamängden med olika fördelning under H_0 resp. H_1.

<u>Ex:</u> Vi singlar slant 100 ggr och låter $\hat{p} = \frac{X}{100}$ där $X = \#T$.

Vi förkastar H_0 om $\hat{p}(x) \geq 0.7$.

Varför just 0.7?

Vad skall vi använda istället?

Anm: 1) Här är $\hat{p}$ test-statistikan.

2) $\alpha = \mathbb{P}(\text{förk. } H_0 \mid H_0 \text{ sann})$

$$= \mathbb{P}(X \geq 70 \mid X \sim Bin(100, \tfrac{1}{2}))$$

$$= \mathbb{P}(X \geq 70), \text{ om } X \sim Bin(100, \tfrac{1}{2})$$

3) $1-\beta = \mathbb{P}(X \geq 70 \mid X \sim Bin(100, p))$

Detta är en funktion av p!

Def: Förkastningsområdet (RR = Rejection Region) för ett test är de värden på test-statistikan för vilka vi förkastar H_0.

Ex: Här är $RR = [0.7, 1]$.

Anm: 1) Om RR ökar förkastar vi mer och signifikansnivån α ökar, detsamma gäller styrkan $1-\beta$.

2) Vi vill ha låg signifikansnivå och hög styrka.

Tal: Betrakta exemplet med slantsingling.

Bestäm RR s.a. $\alpha = 0.05$.

L: Vi vill hitta c s.a.

$$\mathbb{P}(\hat{p} \geq c \mid H_0) = 0.05.$$

Om H_0 är sann (dvs $p = \frac{1}{2}$) så gäller att $\mathbb{E}[\hat{p}] = \mathbb{E}\left[\frac{X}{100}\right] = \frac{1}{2}$ och $\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{100} = \frac{1}{400}$.

CLT ger att $\hat{p} \approx N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{400}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\hat{p} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{20}} = 20\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right) \approx N(0,1).$$

Vi får då

$$0.05 = \mathbb{P}(\hat{p} \geq c) = \mathbb{P}\left(20\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right) \geq 20\left(c - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\approx \mathbb{P}\left(Z \geq 20\left(c - \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{där } Z \sim N(0,1).$$

Tabell ger att $20\left(c - \frac{1}{2}\right) \approx 1.645$ s.a.

$c \approx 0.582$. och $RR = [0.582, 1]$.

Anm: 1) $\hat{p} \,\hat{\approx}\, N(\frac{1}{2}, \frac{1}{400})$ kallas för den approximativa nollfördelningen.

2) Alternativhypoteser kan vara ensidiga, e.g. $H_1: p > \frac{1}{2}$, $H_1: p < \frac{1}{2}$ eller tvåsidiga, e.g. $H_1: p \neq \frac{1}{2}$.

Def: p-värdet för ett test är den minsta signifikansnivån för vilket vårt test förkastar H_0 givet observerade data.

Tal: Aspirin-försöket:

placebo: 11034 individer, 189 h.-a.

aspirin: 11037 ", 104 "

Låt H_0: aspirin har ej effekt

H_1: aspirin reducerar risken för h.-a.

Testa detta på signifikansnivå 0.01 och beräkna p-värdet.

L: Låt X = # h.-a. i placebogruppen vara vår teststatistika

Under H_0 gäller att

$$\underline{X} \sim Hg\left(22071, 293, \frac{11034}{22071}\right) \approx N(E[\underline{X}], Var(\underline{X}))$$

där räkning ger $\underline{X} \approx N(146.5, 72.3)$.

Vi förkastar H_0 om $\underline{X}$ blir för stort (RR: $[c, 293]$)

$$p\text{-värde} = \mathbb{P}(\underline{X} \geq 189 \mid H_0) = \mathbb{P}\left(\frac{\underline{X} - 146.5}{\sqrt{72.37}} \geq \frac{189 - 146.5}{\sqrt{72.37}}\right)$$

$$\approx 1 - \mathbb{P}(Z \leq 5) \approx 0.00000029.$$

Om signifikansnivån hade varit $3 \cdot 10^{-7}$ hade vi förkastat H_0, så vi förkastar H_0 på signifikansnivån 0.01. //

Anm: Om p-värdet $\leq \alpha$ förkastar vi H_0 på signifikansnivå α.

Def: En enhel hypotes H_0 är en hypotes som fullständigt preciserar en fördelning

Ex: $H: \underline{X} \sim N(0, \sigma^2)$ med $\sigma = \sigma_0$

Def: En hypotes som ej är enhel kallas för sammansatt. Ex: $H: \underline{X} \sim N(0, \sigma^2)$ $\sigma^2 \neq \sigma_0$