Hypotestest forts:

proportionstest

Antag att $H_0: p = p_0$

$H_1: p \neq p_0$

med $X \sim Bin(n,p)$.

1) Om n är stort blir $X \approx N(np, np(1-p))$

och vårt RR kan bestämmas ur villkoret

$$\left| \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right| \geq c \quad , \text{ ty } p = p_0 \text{ under } H_0 .$$

2) Om n är litet är nollfördelningen $Bin(n, p_0)$

och $RR = [0, x_{1-\alpha/2}] \cup [x_{\alpha/2}, n]$ där $x_{\alpha/2}$ är

det minsta tal s.a. $\mathbb{P}(X \geq x_{\alpha/2} | H_0) \leq \alpha/2$ och

$x_{1-\alpha/2}$ största tal s.a. $\mathbb{P}(X \leq x_{1-\alpha/2} | H_0) \leq \alpha/2$.

Tal: Saida gissar färgen på 20 kort

som dras slumpmässigt med återläggning.

Om $X = \#$ kort som gissas rätt $\sim Bin(20, p)$.

Hitta RR för $H_0: p = \frac{1}{4}$

$H_1: p > \frac{1}{4}$

på signifikansnivån 5 %, och skissa teststyrkan som funktion av p.

<u>L:</u> Räkning ger att

$$\mathbb{P}(X \geq 8 \mid H_0) = 0.101 \quad \text{och} \quad \mathbb{P}(X \geq 9 \mid H_0) = 0.041$$

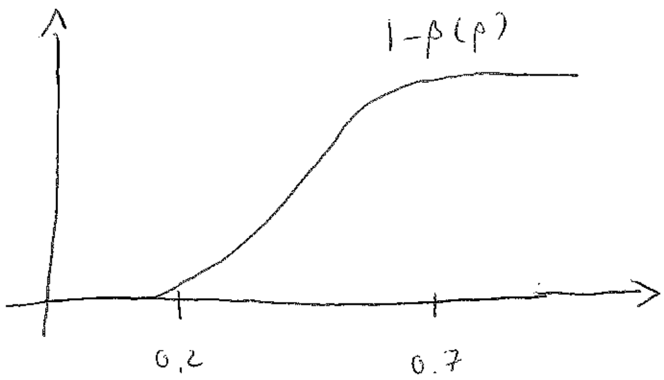
s.a. $RR = [9, 20]$.

Teststyrkan $1-\beta = \mathbb{P}(\text{förk. } H_0 \mid H_1 \text{ sann})$

$$= \mathbb{P}(X \geq 9) \quad \text{om} \quad X \sim Bin(20, p)$$

<u>Tabell:</u>

p	0.27	0.3	0.35	0.4	0.45
$1-\beta$	0.064	0.113	0.238	0.404	0.586



<u>Anm:</u> 1) Om Saida har $p = 0.4$ upptäcker vi detta m.s. 0.404

2) Om 1000 personer gör testet på $\alpha = 0.05$ kommer # som av ren slump får över 9 rätt vara $Bin(1000, 0.041)$. "fishing"

Ibland (ofta?) är det uppenbart hur teststatistika och RR skall väljas. I allmänhet behövs en systematisk metod.

Likelihood ratio test

Idé: Låt H_0, H_1 vara enkla hypoteser, och låt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vara data från en diskret fördelning. Betrakta likelihooden

$$f(x \mid H_0) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \mid H_0),$$

dvs sann att se uttallet x om H_0 sann.

Om $f(x \mid H_0) > f(x \mid H_1)$ är det mer troligt att få x under H_0 än under H_1.

Vi förkastar H_0 om

$$\frac{f(x \mid H_0)}{f(x \mid H_1)} \leq c \qquad \text{(LR-test)}$$

där c väljs så att vi får önskad signifikansnivå.

Här är f tfkn/sIf beroende på om X är kont/diskret.

Anm: 1) LR-test ger ett lämpligt test för alla situationer.

2) Neyman-Pearson visade att av alla test med signifikansnivå α ger LR-testet den högsta styrkan!

3) Hur man skall gå tillväga för att välja c beror på situationen.

Ex: Antag att $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är iid och Poisson-fördelade. Betrakta

$$H_0: \lambda = \lambda_0$$

$$H_1: \lambda = \lambda_1$$

Bilda LR

$$\frac{f(X \mid H_0)}{f(X \mid H_1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} f(X_k \mid H_0)}{\prod_{k=1}^{n} f(X_k \mid H_1)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_0^{X_k}}{X_k!} e^{-\lambda_0}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_1^{X_k}}{X_k!} e^{-\lambda_1}} = e^{n(\lambda_1 - \lambda_0)} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{X_1 + \cdots + X_n}$$

Antag nu att $\lambda_1 > \lambda_0$. Då blir $\frac{f(X \mid H_0)}{f(X \mid H_1)}$ litet om $X_1 + \cdots + X_n$ stor.

Vi förkastar därför H_0 om

$X_1 + \dots + X_n \sim Poi(n\lambda_0)$ överstiger λ_α

$\left(\mathbb{P}(X \geq \lambda_\alpha) = \alpha \quad X \sim Poi(n\lambda_0) \right)$.

Om istället $\lambda_1 < \lambda_0$ förkastar vi om

$X_1 + \dots + X_n$ litet.

Anm: 1) Uttrycket $e^{n(\lambda_1 - \lambda_0)} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^{X_1 + \dots + X_n}$

är en test-statistika (TST) som är

ekvivalent med TST $X_1 + \dots + X_n$.

2) $Poi(n\lambda_0)$ är nollförd. för TST $X_1 + \dots + X_n$.

Generaliserad LR (GLR)

Låt Ω_i $i = 0, 1$ vara en delmängd av de alla möjliga värden på θ. Betrakta

$H_0: \theta \in \Omega_0$

sammansatta hypoteser.

$H_1: \theta \in \Omega_1$

Man bildar sedan $\Lambda = \dfrac{\max_{\theta \in \Omega_0} lik(\theta)}{\max_{\theta \in \Omega} lik(\theta)}$ $\quad \Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$

och låter $RR = \{ \Lambda \leq \lambda_0 \}$

där λ_0 uppfyller $\mathbb{P}(\Lambda \le \lambda_0 \mid H_0) = \alpha$

Ex (sid 339): $X_1, \ldots, X_n$ iid $N(\mu, \sigma^2)$ med σ^2 känd

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu \neq \mu_0$

Vi får $\max_{\cancel{\mu} \in \Omega_0} lik(\mu) = lik(\mu_0) = \ldots = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \times$

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu_0)^2\right)$$

och $\max_{\mu} lik(\mu) = lik(\hat{\mu})$

där $\hat{\mu} = \bar{X}$ är MLE för μ.

$$\Rightarrow \quad \Lambda = \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu_0)^2 - \sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{-2\log\Lambda} = \ldots = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X} - \mu_0|$$

Vi förkastar H_0 om Λ litet

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{-2\log\Lambda}$ stort $\Leftrightarrow$ $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X} - \mu_0|$ stort.

Men då $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ förkastar vi

om $|\bar{X} - \mu_0| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(\alpha/2)$.

Vårt RR blir därför

$$RR = \left[\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(\alpha/2), \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(\alpha/2) \right]^C$$

Anm: Villkoret $\bar{X} \in RR$ är ekvivalent med att $\mu_0 \notin \left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(\alpha/2), \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(\alpha/2) \right] = I_\mu$

$\left(\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(\alpha/2) \Rightarrow \mu_0 \leq \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(\alpha/2) \right).$

Dvs RR och I_μ är komplementära!

Detta är alltid sant (se kap. 9.4).