TMA 321

$\boxed{9.12}$ Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\theta)$ $\boxed{R7}$ 1

med tthn $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$ $x \geq 0$,

Bestäm ett likelihood-ratio test för

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta \neq \theta_0$

Visa att $RR = \{ \bar{X} e^{-\theta_0 \bar{X}} \leq c \}$

1: H_1 är sammansatt så vi får

titta på ett generaliserat LR-test.

Bilda

$$\Lambda = \frac{lik(\theta_0)}{\max_\theta lik(\theta)} = \frac{f(X_1, \ldots, X_n | \theta_0)}{lik(\hat{\theta})}$$

där $\hat{\theta}$ är MLE för θ.

Vi får att $lik(\theta) = f(X_1, \ldots, X_n | \theta) = \prod_{k=1}^{n} f(X_k | \theta)$

$$= \prod_{k=1}^{n} \theta e^{-\theta X_k} = \theta^n e^{-n\theta \bar{X}} \Rightarrow l(\theta) = n \log \theta - n\theta \bar{X}$$

Vi söker maximum och får

$l'(\theta) = \frac{n}{\theta} - n\bar{X}$ och $l''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2}$

Om $l'(\theta) = 0$

$\Rightarrow 1 = \theta \bar{X}$ s.a. $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$ är vår

MLE. $l''(\frac{1}{\bar{X}}) < 0$ så maximum.

Vi får då

$$\Lambda = \frac{\theta_0^n e^{-n\theta_0 \bar{X}}}{\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)^n e^{-n}} = (\theta_0 \bar{X})^n e^{-n\theta_0\bar{X}+n}$$

Vi förkastar H_0 om LR Λ är liten,

dvs $\Lambda \leq c$ för ngt c. Detta är

ekvivalent med $\theta_0 \bar{X} e^{-\theta_0 \bar{X}+1} \leq c^{1/n}$

$$\iff \quad \bar{X} e^{-\theta_0 \bar{X}} \leq \frac{1}{e\theta_0} c^{1/n} \leftarrow \text{konstant.}$$

9.21 Låt $X \sim U[0,\theta]$ vara en observation.

Testa $H_0: \theta = 1$

$H_1: \theta = 2$

a) Hitta ett test med $\alpha = 0$, vad är styrkan?

L: $\alpha = 0$ innebär aldrig felaktig förkastning.

Tag $RR = \{X > 1\}$, dvs förkasta om $X > 1$.

$$1-\beta = \mathbb{P}(\text{förk. } H_0 \mid H_1 \text{ sann}) = \mathbb{P}(X > 1 \mid X \sim U[0,2]) = \frac{1}{2}$$

b) Låt $0 < \alpha < 1$ och låt ett test vara s.a.

$RR = [0,\alpha]$. Vad är signifikansen och styrkan?

L: $\text{sign} = \mathbb{P}(\text{förk. } H_0 \mid H_0 \text{ sann}) = \mathbb{P}(X \leq \alpha \mid X \sim U[0,1]) = \alpha$

$$1-\beta = \mathbb{P}(\text{förk } H_0 \mid H_1 \text{ sann}) = \mathbb{P}(X \leq \alpha \mid X \sim U[0,2]) = \frac{\alpha}{2}$$

c) Reject om $X \in [1-\alpha, 1]$, vad är sign och styrka?

$\mathcal{L}$: $\text{sign} = \mathbb{P}(1-\alpha \leq X \leq 1 \mid X \sim U[0,1]) = \alpha$

$1-\beta = \mathbb{P}(\quad \text{— " —} \quad \mid X \sim U[0,2]) = \frac{\alpha}{2}$ //

d) Hitta fler test med samma sign/st.

$\mathcal{L}$: Reject om $X \in [\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}]$ etc. //

e) Vilket RR ger ett LR-test?

$\mathcal{L}$:

$$\frac{f(X \mid H_0)}{f(X \mid H_1)} = \frac{I[0 \leq X \leq 1]}{\frac{1}{2} I[0 \leq X \leq 2]} \leq c$$

ger $RR = \{X > 1\}$ om $c < \frac{1}{2}$ //

f) Vad händer om $H_0: \theta = 2$

$H_1: \theta = 1$

$\mathcal{L}$: Om $RR = \{X \leq \alpha\}$ får vi

$\text{Sign} = \mathbb{P}(\text{förk } H_0 \mid H_0) = \mathbb{P}(X \leq \alpha \mid X \sim U[0,2]) = \frac{\alpha}{2}$

$\text{styrka} = \mathbb{P}(X \leq \alpha \mid X \sim U[0,1]) = \alpha$

dvs signifikans och styrka byts //

TMA 321

R7 4

11.10 Verifiera att två stickprovs t-test på sign. α av

$$H_0: \mu_X = \mu_Y$$

$$H_1: \mu_X \neq \mu_Y$$

förkastar omm $I_{\mu_X - \mu_Y}$ ej inn. 0.

1: Uppgiften baseras på räkningarna på sid 426-427:

Vi har $\Theta = (\mu_X, \mu_Y, \sigma)$ (antar samma σ för X, Y).

$$\Rightarrow \quad \mathrm{lik}(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X_k - \mu_X}{\sigma}\right)^2\right] \prod_{l=1}^{m} \cdots$$

Man bildar sedan

$$\Lambda = \frac{\max_{\Theta \in \Omega_0} \mathrm{lik}(X, Y \mid H_0)}{\max_{\Theta \in \Omega} \mathrm{lik}(X, Y \mid H_1)}$$

Här är $\Omega_0 = \{\mu_X = \mu_Y,\ 0 < \sigma < \infty\}$

Lång räkning ger att vi förkastar H_0

om Λ liten $\Leftrightarrow$ $\dfrac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{m} (Y_j - \bar{Y})^2}}$ stor.

$\boxed{R7}$ 5

men $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2=\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}(n+m-2)$

$=(n+m-2)S_p^2$. Vi förkastar H_0 om

$$\frac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}{\sqrt{n+m-2}} \text{ stort.}$$

Då $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t_{n+m-2}$ förk. vi H_0 på

sign. nivå α om

$$\frac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\geq t_{n+m-2}(\alpha/2)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0\notin I_{\bar{X}-\bar{Y}}=\bar{X}-\bar{Y}\pm S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,t_{n+m-2}(\alpha/2)$$

Så att 0 ∉ ~~till~~ hör vårt $100(1-\alpha)\,\%$ K.I.

TMA 321

$\boxed{11.36}$ Vi har två mätserier med $\boxed{R7}$ (6)

<u>parade</u> data:

x	y	(se bok)
97.2	97.2	
105.8	97.8	
99.5	96.2	
⋮	⋮	

$n = 15$

Analysera data för att se om det finns någon skillnad. Vad händer om vi missar att data är parade?

<u>L</u>: Då vi har parade data låter vi

$Z_i = X_i - Y_i$ och $z_i = x_i - y_i$.

Om $Z_i \sim N(\Delta, \sigma^2)$ blir ett 95 % K.I.

för Δ

$$I_\Delta = \bar{Z} \pm \frac{S_Z}{\sqrt{15}} t_{\alpha/2}(14)$$

och data/tabell ger $t_{0.025}(14) \approx 2.145$

$\bar{z} = 0.44$ $\quad S_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 \approx 21.6 \Rightarrow S_z \approx 4.65$

Ett 95 % numeriskt K.I. blir då

$$I_\Delta = 0.44 \pm \frac{4.65}{\sqrt{15}} \cdot 2.145 = [-2.14, 3.02].$$

Om vi ej har parade blir

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\, S_p} \sim t_{n+m-2}$$

där $$s_p^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2} \approx 8205$$

$\Rightarrow$ $s_p \approx 90.58$ och därmed blir ett

95 % K.I. $(t_{15+15-2}(0.025) \approx 2.048)$

$$I_{\bar{x}-\bar{y}} = 0.44 \pm 90.58\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}} \cdot 2.048 \approx [-67.3, 68.18]$$

rejält kasst.