TMA 321

$\boxed{14.13}$ Antag att vi har en linj. regr. $\boxed{R8}$ 1

model med $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$

Betrakta en ny punkt x_0 och låt $\mu_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0$.

Vi skattar μ_0 med $\hat{\mu}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$

ab) Bestäm $Var(\hat{\mu}_0)$ som funktion av $x_0 - \bar{x}$.

1: Vi har att

$$Var(\hat{\mu}_0) = Var(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) = Var(\hat{\beta}_0) + Var(\hat{\beta}_1 x_0) + 2\,Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1 x_0)$$

$$= \sigma^2 \frac{\sum x_k^2}{n\, S_{xx}} + x_0^2 \frac{\sigma^2}{S_{xx}} + 2x_0\, Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1).$$

Här är $S_{xx} = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - n\bar{x}$$

Enl. boken är $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \dfrac{-\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} x_k}{n\, S_{xx}} = -\dfrac{\sigma^2 \bar{x}}{S_{xx}}$

$$\Rightarrow Var(\hat{\mu}_0) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + x_0^2 - 2x_0\bar{x} \right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \left((x_0 - \bar{x})^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \bar{x}^2 \right) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \left(\frac{S_{xx}}{n} + (x_0 - \bar{x})^2 \right)$$

$\boxed{R8}$ 2

c) Hitta ett 95 % K.I. för μ_0.

L: Vi får att (varför det??)

$$\frac{\hat{\mu}_0 - \mu_0}{S_{\hat{\mu}_0}} \sim t_{n-2} \quad \text{där} \quad S_{\hat{\mu}_0} = \text{skattning}$$

av $\sqrt{Var(\hat{\mu}_0)}$, dvs

$$S_{\hat{\mu}_0} = S_r \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)^{1/2} \quad \text{där}$$

$$S_r^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \hat{Y}_k)^2 .$$

Ett 95 % K.I. blir då

$$0.95 = \mathbb{P}\left(-t_{n-2}(0.025) \le \frac{\hat{\mu}_0 - \mu_0}{S_{\hat{\mu}_0}} \le t_{n-2}(0.025) \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\hat{\mu}_0 - S_{\hat{\mu}_0} t_{n-2}(0.025) \le \mu_0 \le \hat{\mu}_0 + S_{\hat{\mu}_0} t_{n-2}(0.025) \right) //$$