EXAMINATION: Tentamensskrivning i Matematisk Statistik (TMS060)

Tid: Onsdagen den ~~11~~ 18 April, 2007

Jour: Anastassia Baxevani, tel: 070-2972910

Tillåtna: Formelsamling, tabeller (även BETA, Physics Handbook, skoltabeller, t.ex. TEFYMA), valfri räknedosa, ett A4-blad med egna anteckningar men **ej** lärobok.

Poönggränser: 24p för 5, 18p för4, 12p för 3.

Read this before you start to solve the problems: Motivate all your answers.It would be great if you could write in english. Good Luck!

1) Från en maskin för tillverkning av kondensatorer tog man en provserie på 8 som gav kapacitarna

996 973 1004 971 986 991 1011 985 pF

Antag att detta är ett stickprov på en normalförddelning med väntevärdet μ och intervallskatta μ med

a) ett tvåsidigt symmetriskt intervall

b) ett ensidigt, nedåt begränsat intervall

(konfidensgrad i båda fallen: 0.99) (4p)

2) $\hat{B}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{X})Y_i}{S_{xx}}$ är ett sätt att skriva maximimetodens punktskattning av B_1 i den enkla linjära regressionsmodellen. Visa att $E(\hat{B}_1) = B_1$ och $Var(\hat{B}_1) = \sigma^2/S_{xx}$. (3p)

3) Till en telefonväxel kommer anrop enligt en Poissonprocess med intensiteten $c = 2$ per minut. Vad är sannolikheten att det efter ett anrop dröjer mer än en minut till nästa? (Tiden mellan anrop är exponentialfördeled med väntevärdet $1/c$). (3p)

4) En robot används vid biltillverkning för två arbetsmoment, åtdragning av bultar och svetsning. Låt A vara händelsen att ingen underkänd svetsning påträffas i en bil vid kontroll och B händelsen att minst en dåligt åtdragen bult hittas. Antag att $P(A) = 0.90, P(B) = 0.20$ och $P(A \cap B) = 0.14$. Beräkna $P(A' \cup B)$. (A' betecknar komplementhändelsen till A.) (3p)

5)

$$14.7 \quad 20.8 \quad 6.9 \quad 12.4$$

är ett observerat stickprov på X med frekvensfunktionen

$$f(x) = \frac{x}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}, \quad x > 0.$$

Bestäm maximimetodens skattning av α. (3p)

6) Frekvensfunktionen för den tid X det tarr att betjäna en kund i ett betjäningssystem är $f(x) = \frac{10-x}{50}$, $0 < x < 10$.

a Bestäm $E(X)$ och $Var(X)$.

b Antag att kostnaden Y för en kund är $800 + 100X$. Bestäm $E(Y)$ och $Var(Y)$.

(4p)

7) X och Y är oberoende och Poissonfördelade med väntevärdet 2. Vad är $P(X + Y \leq 1)$? (3p)

8) I en enkel linjär regressionsmodell gav ett test av $H_0 : \beta_1 = 0$ mot $H_1 : \beta_1 > 0$ p-värdet 0.024.
Kan H_0 förkastas på 0.01-nivå? Varför / varför inte?
Vad blir p-värdet om alternativet i stället är $H_1 : \beta_1 \neq 0$? (4p)

9) Låt $(X_1, \ldots, X_{15})$ vara ett stickprov på X, som är $N(\mu, \sigma^2)$ där σ^2 är känd. Då är som bekant $I = (\bar{X} - 1.96\sigma/\sqrt{15}, \bar{X} + 1.96\sigma/\sqrt{15})$ ett 0.95 konfidensintervall för μ. Antag att man gör ytterligare en observation X_{16}. Beräkna sannolikheten att $X_{16} \in I$ (3p)

Solutions TMS060 Matematisk Statistik

2007-04-14

1) $\bar{x} = 989.6$, $s^2 = 194.8$, $s \cong 14$ **4p**

a) $\mu = \bar{x} \pm t_{0.005,7} \cdot \frac{s}{\sqrt{8}} = 989.6 \pm 3.4995 \cdot \frac{14}{\sqrt{8}} =$

$= 989.6 \pm 17.3 = (972.3, 1006.9)$

b) $\mu \geq \bar{x} - t_{0.01,7} \cdot \frac{s}{\sqrt{8}} = 989.6 - 2.998 \cdot \frac{14}{\sqrt{8}} = 974.8$

2) $$E[\hat{\beta}_1] = E\left[\frac{\sum(x_i - \bar{x})Y_i}{S_{xx}}\right] = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot EY_i}{S_{xx}} =$$

$$= \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (\beta_0 + \beta_1 x_i)}{S_{xx}} = \frac{\beta_0 \overbrace{\sum_i (x_i - \bar{x})}^{0} + \beta_1 \sum x_i(x_i - \bar{x})}{S_{xx}}$$

$$= \frac{\beta_1(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}{S_{xx}} = \frac{\beta_1 \cdot S_{xx}}{S_{xx}} = \beta_1$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})Y_i}{S_{xx}}\right)^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}^2} \mathrm{Var}(Y_i)$$

$$= \frac{S_{xx}}{S_{xx}^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

3p

#3 X = time until nästa anrop follows exp distr. with expected value $1/2$

Then $P(X>1)=\int_1^\infty 2\cdot e^{-2x}\,dx = -e^{-2\cdot x}\Big/_1^\infty = e^{-2} \approx 0.13$

3p

#4)

$A \cap B$

		B
A	0.76	0.14
	0.04	0.06

$P(A' \cup B) = 0.04+0.14+0.06 =$
$= 0.24$

3p

#5) For $(X_1, \dots X_n)$ we have

$$L(\alpha) = \frac{x_1}{\alpha} e^{-x_1^2/2\alpha} \cdots \frac{x_n}{\alpha} e^{-x_n^2/2\alpha} =$$

$$= \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{\alpha^n} e^{-\frac{1}{2\alpha}\sum_{i=1}^n x_i^2} \Rightarrow$$

$$\ln L(\alpha) = \ln(x_1 \ldots x_n) - n\ln\alpha - \frac{1}{2\alpha}\sum x_i^2$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha)}{\partial\alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\sum x_i^2 = 0 \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\sum x_i^2}{2n}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{14.7^2+20.8^2+6.9^2+12.4^2}{8} = \underline{106.26}$$

3p

6)

$$EX = \int_0^{10} x \frac{10-x}{50}\,dx = \int_0^{10} \frac{10x}{50} - \frac{x^2}{50}\,dx = \frac{10}{50}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{50}\frac{x^3}{3}\Big|_0$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{100}{2} - \frac{1}{\cancel{50}}\frac{\overset{20}{\cancel{1000}}}{3} = 10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$$

$$EX^2 = \int_0^{10} x^2 \frac{10-x}{50}\,dx = \frac{1}{50}\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 50/3$$

$$\operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{50}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}$$

4p

$$EY = 800 + 100\,EX = 800 + 100\,\frac{10}{3} = 1133.33$$

$$\operatorname{Var} Y = 10000 \operatorname{Var} X = 55555.56$$

7) $$P(X+Y \le 1) = P(X=0)\,P(Y=0) + P(X=1)\,P(Y=0) + P(X=0)\,P(Y=1) = e^{-2}e^{-2} + 2e^{-2}e^{-2} + 2e^{-2}e^{-2} = 5e^{-4} = 0.0916$$

3p

8) a) Nej ; $H_0 : \beta_1 = 0$ 2p

b) $2 * 0.024 = 0.048$ 2p

3p

(9) $$P(X_{16} \in I) = P\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{15}} \le X_{16} \le \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{15}}\right) =$$

$$= P\left(-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{15}} \le \bar{X}_{16} - X_{16} \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{15}}\right) =$$

3p

$$\bar{X} - X_{16} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{15} + \sigma^2\right) = N\left(0, \left(\frac{4\sigma}{\sqrt{15}}\right)^2\right)$$

$$P(X_{16} \in I) = \Phi\left(1.96\frac{\sigma}{\sqrt{15}} \Big/ \left(\frac{4\sigma}{\sqrt{15}}\right)\right) - \Phi\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{15}}\right) \Big/ \frac{4\sigma}{\sqrt{15}} =$$

$$= 2\cdot\Phi\left(\frac{1.96}{4}\right) - 1 = 2\cdot\Phi(0.49) - 1 = 0.3758$$

$\#$