Tentamenskrivning för TMS063, Matematisk Statistik.
Tisdag em den 19 aug, 2014, V-huset.
Examinator: Marina Axelson-Fisk. Tel: 070-2288113
Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd miniräknare, tabell- och formelhäfte (utdelas).

****

Tentan är på totalt 50 poäng: 40 poäng på matstat-delen, 10 poäng på flervariabel-delen. För att bli godkänd krävs godkänt på båda delarna. Betygsgränser för betyg 3, 4 och 5 är 40% (20p), 60% (30p) och 80% (40p), respektive. Givet att båda delarna är godkända, ges betyget av den totala poängsumman.
Fullständiga och välmotiverad lösningar skall ges till varje uppgift.

Del I: Matematisk Statistik

1. För händelserna A och B gäller att $P(A) = 0.3$ och $P(B) = 0.5$.
   (a) Vad är sannolikheten $P(A \cap B)$ om A och B är disjunkta? (2p)
   (b) Vad är $P(A \cap B)$ om A och B är oberoende? (2p)
   (c) Vad är $P(A \cap B)$ om $P(A \cup B) = 0.2$? (2p)

2. En vanlig kortlek består av 52 kort, varav 13 i varje färg. En pokerhand består av 5 kort.
   (a) Vad är sannolikheten att en pokerhand innehåller ett fyrtal? (4p)
   (b) Vad är sannolikheten att en pokerhand innehåller endast en färg? (4p)

3. I en markundersökning har man uppskattat att risken för att marken är förorenad är ca 70%. Jordanalysen ger dock inte alltid rätt utslag: mätapparaten detekterar förorening i ca 95% av de förorenade fallen, och ca 20% av fallen då provet inte är förorenat. Om du har ett prov där förorening detekterats, vad är sannolikheten att provet verkligen är förorenat? (6p)

4. Tiderna mellan landningar på en flygplats är oberoende exponentialfördelade med väntevärde 2 minuter. Antag att ett plan precis har landat. Vad är sannolikheten att det under nästkommande fem minuter landar åtminstone tre plan? (6p)

5. Antag att antalet timmar ett batteri fungerar tillfredsställande är normalfördelat. Ett stickprov på $n = 8$ batterier testades och data kan sammanfattas med

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 206.00 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 5311.3670.$$

   Tillverkarens krav är att batterierna ska fungera i minst 25 timmar. Verkar kravet vara uppfyllt? (Tips: utveckla formeln för s^2 för att kunna använda informationen.) (6p)

6. Man jämförde två betongkvaliteter m.a.p. hållfasthet. Med referenskvaliteten gjordes 4 blandningar och man erhöll stickprovet: 6.20, 6.79, 8.09, 6.52 ($\bar{x}_R = 6.9$, $s_R = 0.8298$). Med den nya kvaliteten gjordes 9 blandningar och man erhöll: 6.86, 6.86, 6.87, 5.93, 6.93, 6.13, 5.87, 6.54, 6.78 ($\bar{x}_N = 6.530$, $s_N = 0.4347$). Testa på nivå 10% om det är någon skillnad i medelhållfasthet för de två kvaliteterna. (8p)

Var god vänd!

Del II: Flervariabelanalys

7. Ange definitionsområdet D_f för funktionen $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ dvs ange de punkter (x,y) för vilket uttrycket $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ är definierat. Skissa även området D_f och några nivåkurvor till $f(x,y)$ i xy-planet. (3p)

8. Beräkna dubbelintegralen $\int_T (y - 2x)\, dxdy$, då T är triangelområdet med hörn i punkterna $(0,0)$, $(0,2)$ och $(1,2)$. (4p)

9. Beräkna längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ (3p)

Lösningar

Del I: Matematisk Statistik

1. (a) $P(A \cap B) = 0$
   (b) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.15$
   (c) $P(A \cap B) = PI(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6$

2. Antalet möjliga pokerhänder ges av (ordningen kvittar och utan återläggning)

$$\binom{52}{5} = 2598960$$

   (a) Det finns 13 valörer att välja på, så fyra av korten kan bilda fyrtal på 13 sätt. Det femte kortet kan vara vilket som helst av de övrig 48 korten. Så antalet möjliga pokerhänder med fyrtal blir (mha multiplikationsregeln) $13 \cdot 48 = 624$, och sannolikheten för fyrtal blir

$$P(\text{fyrtal}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = 0.00024$$

   (b) Det finns 4 färger att välja på, och i en viss färg ska vi dra 5 kort av 13. Antal möjliga färghänder blir alltså

$$4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$$

   Den sökta sannolikheten blir

$$P(\text{farg}) = \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = 0.002$$

3. Här använder vi Bayes formel. Vi definiera händelserna
   A = marken är förorenad
   B = mätapparaten ger utslaget "förorenat"
   Bayes formel ger

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

   Vi får från uppgiftstexten att

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.70 \\ P(A^c) &= 1 - P(A) = 0.30 \\ P(B|A) &= 0.95 \\ P(B|A^c) &= 0.20 \end{aligned}$$

   Så vi får

$$P(A|B) = \frac{0.95 \cdot 0.70}{0.95 \cdot 0.70 + 0.20 \cdot 0.30} = 0.92$$

4. Eftersom tiderna mellan landningar är oberoende exponentialfördelade med parameter $\lambda = 2$, blir antal landningar per minut Poissonfördelad med parameter $1/2 = 0.5$. Antal landningar under 5 minuter blir alltså Poissonfördelat med parameter $5 * 0.5 = 2.5$. Låt N vara antalet flygplan som landar under 5 minuter. Den sökta sannolikheten blir

$$P(N \geq 3) = 1 - P(N \leq 2) = 1 - e^{-2.5}\left(1 + 2.5 + \frac{2.5^2}{2}\right) \approx 0.46$$

5. Vi vill alltså testa hypotesen

   $H_0 : \mu = 25$
   $H_1 : \mu > 25$

   Vi har normalfördelning med variansen okänd. Vår teststatistika blir

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

   där

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 25 \\ n &= 8 \\ \bar{x} &= (\sum_{i=1}^{8} x_i)/8 = 206/8 = 25.75 \end{aligned}$$

   Vi behöver även stickprovsvariansen

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

   men har endast $\sum_{i=1}^{n} x_i$ och $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ från uppgiften. Alltså måste vi utveckla formeln för s^2:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + \bar{X}^2 - 2X_i\bar{X}) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 - \frac{2}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}^2 \\ &= \frac{1}{7}5311.3670 - \frac{8}{7}(25.75)^2 \\ &= 0.981 \end{aligned}$$

   Alltså får vi att

$$T_0 = \frac{25.75 - 25}{\sqrt{0.981/8}} = 2.142$$

   och exempelvis för $\alpha = 0.05$ har vi att $t_{\alpha,n-1} = t_{0.05,7} = 1.895$, så vi kan förkasta nollhypotesen på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

6. Vi har alltså två oberoende stickprov. Varianserna är okända, men vi antar att de är lika för de två stickproven (eftersom det är det enda fallet vi kan). Vi vill testa

$$H_0 : \mu_R = \mu_N \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu_R \neq \mu_N$$

   Vår teststatistika blir alltså

$$T_0 = \frac{\bar{X}_R - \bar{X}_N - d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_R} + \frac{1}{n_N}}}$$

där

$$\begin{aligned}
\bar{X}_R &= 6.9 \\
\bar{X}_N &= 6.53 \\
d_0 &= 0 \\
n_R &= 4 \\
n_N &= 9 \\
s_p^2 &= \frac{3 \cdot 0.8298^2 + 8 \cdot 0.4347^2}{4+9-2} = 0.3252
\end{aligned}$$

Så teststatistikan blir

$$T_0 = \frac{6.9 - 6.53}{\sqrt{0.3252 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)}} = 1.080$$

För $\alpha = 0.10$ förkastar vi om $t_0 > t_{0.05,11} = 1.796$, så vi kan inte förkasta nollhypotesen.

Del II: Flervariabelanalys

7. $D_f : x^2 + y^2 \leq 4$ är en cirkelskiva med centrum i origo och radie 2. Nivåkurvorna till $f(x, y)$ bildar cirklar kring origo med radie ≤ 2.

8. $\displaystyle \iint_T (y - 2x)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{2x}^2 (y - 2x)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 - 2xy \right]_{2x}^2 dx =$
   $\displaystyle = \int_0^1 (2 - 4x - 2x^2 + 4x^2)\, dx = \left[2x - 2x^2 + \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$

9. Längden av kurvan ges av;

$$\int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{8t^2 + 9t^4}\, dt = \int_0^1 t\sqrt{8 + 9t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{27} \left[(8 + 9t^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{27} \left(17^{3/2} - 8^{3/2} \right)$$