Matematisk statistik TMS063
Dugga 1 2018-04-24

Examinator: Olof Elias
Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare och bifogade formelblad och fördelningstabeller
Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!
Namn: ______________________________

Personnummer: ______________________________

Varje uppgift är värd 4 poäng. Duggan kan ge bonus poäng på tentan. För 1 bonus poäng krävs 6 poäng, för 2 poäng krävs 9 poäng.

1. Antag att 0.1% av befolkningen har en sjukdom S och antag att det finns ett test som visar positivt 95% av fallen. Om en person **inte** har sjukdomen visar testet positivt i 2% av fallen.

   Givet att en person testas positivt för sjukdomen S vad är sannolikheten att personen har sjukdomen?
   Lösning: Låt $S = \{$ Har sjukdom S $\}$ och $T = \{$ Testet visar positivt $\}$, från uppgiften fås då

$$P(S) = 0.001,\ P(T|S) = 0.95,\ P(T|S^c) = 0.02, \tag{1}$$

   och vi söker $P(S|T)$. Bayes sats ger

$$P(S|T) = \frac{P(T|S)P(S)}{P(T)}$$

   där alla är kända förutom $P(T)$. Denna fås genom att applicera *Lagen om total sannolikhet*:

$$P(T) = P(T|S)P(S)+P(T|S^c)P(S^c) = 0.95 \cdot 0.001+0.02 \cdot 0.999 = 0.02093.$$

   Detta ger

$$P(S|T) = \frac{0.95 \cdot 0.001}{0.02093} = 0.0453... \approx 0.045.$$

2. Låt X vara en diskret stokastisk variabel med följande täthet

x	0	1	-1	2	-2
f(x)	p	1/4	1/4	1/8	1/8

där p är något tal sådan att f är en täthet.

(a) Bestäm p så att f är en täthet.

(b) Beräkna väntevärde och variansen av X.

Lösning:

a) För att f skall vara en täthet måste $p \geq 0$ och

$$\sum_x f(x) = 1 \Leftrightarrow p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

vilket ger $p = 1/4$.

b) Väntevärdet ses vara 0 då X är symmetrisk, dvs. X tar lika stora negativa och positiva värden med lika stora sannolikheter. Variansen blir därmed

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] = \sum_x x^2 f(x) \\ &= 1^2\frac{1}{4} + (-1)^2\frac{1}{4} + 2^2\frac{1}{8} + (-2)^2\frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

3. Leif GW Persson står och kastar macka vid en sjö. Antag att han som längst kan kasta 50 meter och att längden av kastet är slumpmässigt och likformigt fördelat på $[0, 50]$.

   (a) Beräkna sannolikheten att Leif kastar längre än 30 m

   (b) Om Leif har 10 stenar till sitt förfogande och gör varje kast oberoende av varandra. Vad är sannolikheten att minst 7 stenar når över 30 m?

   Lösning:

   a) Att X är likformigt fördelat på $[0, 50]$ innebär att X har följande täthet
   $$f(x) = \frac{1}{50}, \ x \in [0, 50].$$
   Sannolikheten att Leif kastar längre än 30 m ges av
   $$P(X > 30) = \int_{30}^{50} \frac{1}{50} dx = (50 - 30)/50 = 2/5.$$

   b) Låt Y vara den stokastiska variabel som beskriver antal lyckade kast som Leif gör. Då är Y Binomial fördelad med $n = 10$ och $p = P(X > 30) = 2/5$ som beräknades i a-delen. Alltså, Y har täthet
   $$f(k) = \binom{10}{k} p^k (1 - k)^{n-k}$$
   Det som söks i uppgiften är
   $$P(Y \geq 7) = f(7) + f(8) + f(9) + f(10) = 0.0547... \approx 0.05.$$

-