Matematisk statistik TMS063
Dugga 2 2018-05-18

Examinator: Olof Elias
Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare och bifogade formelblad och fördelningstabeller
Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!
Namn: ____________________

Personnummer: ____________________

Varje uppgift är värd 4 poäng. Duggan kan ge bonus poäng på tentan. För 1 bonus poäng krävs 6 poäng, för 2 poäng krävs 9 poäng.

1. Låt $f(x,y) = x + y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ vara tätheten för den kontinuerliga stokastiska vektorn (X,Y).

   (a) Beräkna marginaltätheterna för X och Y.

   (b) Beräkna väntevärdet för X ocht Y.

   (c) Beräkna kovariansen av X och Y. Är X och Y oberoende?.

   Lösing:

   (a) Marginaltätheterna ges av

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 x + y\mathrm{d}y = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^1 = x + \frac{1}{2},$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x = \| \text{ På samma sätt som ovan } \| = y + \frac{1}{2}.$$

   (b) Väntevärdet för X ges av

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^1 x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{7}{12}.$$

   På precis samma sätt fås

$$\mathrm{E}[Y] = \frac{7}{12}.$$

   (c) Kovariansen av X och Y defineras av

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

   så vi måste räkna ut

$$\mathrm{E}[XY] = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 y\left(\int_0^1 (x^2 + xy)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 y\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2}\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^1 y\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{3}.$$

Vilket ger kovarians

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144}.$$

Eftersom $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$ ger detta att X och Y inte kan vara oberoende. (Det räcker att kolla att $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$).

2. För att uppskatta belastningen av en bro behöver man veta hur många fordon som passerar varje timme. Man vet att i snitt passerar det 10 fordon per timme och man approximerar antalet fordon som passerar med en Poisson process.

   (a) Beräkna sannolikheten att det passerar 3 eller fler fordon under en timma.

   (b) Beräkna sannolikheten att det tar som mest 10 minuter tills att första fordonet passerar.

   Lösning:

   (a) Låt $N(t)$ vara Poisson processen som beskriver antalet fordon som passerar. Från uppgiften så har vi $\lambda = 10$ och $t = 1$ (om vi räknar tiden i timmar). Då $N(t) \sim \mathrm{Po}(10 \cdot 1)$, får man att $N(1)$ är Poisson fördelad med parameter $\lambda t = 10$. Sannolikheten att det passerar 3 eller fler fordon ges av

$$P\left(N(1) \geq 3\right) = 1 - P\left(N(1) \leq 2\right) = 1 - \mathrm{e}^{-10}\left(1 + \frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!}\right) \approx 1 - 0.003 = 0.997.$$

   (b) Låt T vara tiden (i timmar) det tar tills första fordonet passerar. Då är T exponentialfördelat med parameter λ (se Sats 4.3.3 s.111) , dvs T har täthet

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

   Sannolikheten att det tar som mest 10 minuter ges av

$$P(T \leq 10/60) = \int_0^{1/6} 10\mathrm{e}^{-10x}\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-10 \cdot \frac{1}{6}} \approx 0.81.$$

3. Låt $x = (x_1, ..., x_n)$ vara ett observerat stickprov med stickprovsmedelvärde $\bar{x} = 4.08$, stickprovsvarians $s^2 = 9.40$ och $n = 10$.

   (a) Om x är ett stickprov från normalfördelningen $N(\mu, 3)$ beräkna ett tvåsidigt 99%-igt konfidensintervall.

   (b) Om x är ett stickprov från normalfördelningen $N(\mu, \sigma^2)$, där σ är okänt, beräkna ett tvåsidigt 99%-igt konfidensintervall.

   Lösning:

   (a) Ett $100(1-\alpha)$%-igt konfidensintervall ges av

   $$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},$$

   där z_α defineras enligt

   $$P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha,\ Z \sim N(0,1).$$

   Ett 99%-igt konfidensintervall svarar mot en signifikansnivå på $\alpha = 0.01$. Från Table III alternativt Table V fås $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.576$. Detta ger oss följande konfidensintervall

   $$4.08 \pm 2.576\sqrt{\frac{3}{10}} = 4.08 \pm 1.41 = [2.67, 5.49].$$

   (b) Ett $100(1-\alpha)$%-igt konfidensintervall ges av

   $$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2/n},$$

   där t_α defineras av

   $$P(T \leq t_\alpha) = 1 - \alpha, T \text{ t-fördelad med } n-1 \text{ frihetsgrader.}$$

   Från Table V med $\nu = n - 1 = 10$ fås $t_{0.005} = 3.250$ vilket ger

   $$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\sqrt{s^2/n} = 4.08 \pm 2.861\sqrt{\frac{9.4}{10}} \approx 4.08 \pm 3.15 = [0.93, 7.23].$$