Dugga 2: TMS063 Matematisk Statistik. Tisdag 6 maj, 2014. Examinator: Marina Axelson-Fisk.
Tillåtna hjälpmed: typgodkänd miniräknare och bifogade formelblad och fördelningstabeller.

Namn:____ Person nr:_________________________

****

Varje uppgift är värd 4 poäng. Duggan kan ge bonuspoäng på den slutliga tentan. För 2 bonuspoäng krävs 9 poäng, för 1 bonuspoäng krävs 6 poäng.

1. Den kontinuerliga stokastiska variabeln X har täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{\lambda^4 x^3}{6} e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0.$$

Bestäm Maximum Likelihood-skattningen av parametern λ för det observerade stickprovet:

407 528 399 490 640

Lösning:

Likelihoodfunktion:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^4 x_i^3}{6} e^{-\lambda x_i} = \frac{\lambda^{4n}}{6^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^3 \right) e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = 4n \ln \lambda - n \ln 6 + 3 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{4n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \hat{\lambda} = \frac{4}{\bar{x}}$$

Och sätta in värdena från stickprovet ger

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(407 + 528 + 399 + 490 + 640) = 484.8$$

så

$$\hat{\lambda} = \frac{4}{484.8} = 0.0082$$

Alternativt kan man börja med att sätta in värdena från stickprovet direkt i $L(\lambda)$ och sedan logaritmera och derivera. Det spelar ingen roll vilken ordning man gör det.

2. Antag att en lösnings fryspunkt är normalfördelad $N(\mu, \sigma^2)$. Ett stickprov på sex mätningar av fryspunkten gav följande resultat:

0.4 1.0 0.8 1.5 1.3 1.1

a) Bilda ett 95% konfidensintervall för μ när σ^2 är känd och lika med 0.4.
b) Hur stort stickprov behövs för att få ett 99% konfidensintervall av samma längd som i (a)?

Lösning:

a) Två-sidigt konfidens-intervall för μ:

$$\mu = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

För $1-\alpha = 0.95$ får vi från $N(0,1)$-tabell

$$\Phi\left(z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Med $n = 6$ och $\bar{x} = \frac{1}{6}(0.4 + 1.0 + 0.8 + 1.5 + 1.3 + 1.1) = 1.017$ får vi

$$\mu = 1.017 \pm 1.96\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{6}} = 1.017 \pm 0.506$$

eller

$$0.5109 \leq \mu \leq 1.523$$

b) $1-\alpha = 0.99 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$

Vi vill bestämma n så att intervallet får samma längd som i (a). Dvs vi vill att

$$2.58\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{n}} = 1.96\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{6}}$$

eller

$$n = \left(\frac{2.58}{1.96}\sqrt{6}\right)^2 = 10.396$$

Dvs, vi behöver ett stickprov med $n = 11$ observationer för att få samma längd som intervallet i (a).

3. Antag att vi har dragit ett stickprov på $n = 12$ från en normalfördelningen $N(\mu, \sigma^2)$ och fick stickprovsmedelvärde $\bar{x} = 10.6$ och stickprovsvarians $s^2 = 1.2$. Testa med signifikansnivå $\alpha = 0.05$ hypotesen $H_0: \sigma^2 = 1.5$ mot $H_1: \sigma^2 \neq 1.5$.

Lösning:

Vi använder test-statistikan

$$X_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$X_0^2 = \frac{(12-1)1.2}{1.5} = 8.8$$

$$\chi_{0.025,11}^2 = 21.92$$
$$\chi_{0.975,11}^2 = 3.816$$

Vi förkastar H_0 om $X_0^2 > 21.92$ eller om $X_0^2 < 3.816$, så vi kan INTE förkasta H_0.