Tentamenskrivning för TMS063, Matematisk Statistik.
Onsdag fm den 3 juni, 2015, V-huset.
Examinator: Marina Axelson-Fisk. Tel: 070-2288113
Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd miniräknare, tabell- och formelhäfte (utdelas).

****

Tentan är på totalt 50 poäng: 40 poäng på matstat-delen, 10 poäng på flervariabel-delen. För att bli godkänd krävs godkänt på båda delarna. Betygsgränser för betyg 3, 4 och 5 är 40%, 60% och 80%, respektive. Betygen på de båda delarna vägs samman. **Fullständiga och välmotiverad lösningar skall ges till varje uppgift.**

Del I: Matematisk Statistik

1. I en kortlek finns 52 kort, med 13 kort i varje färg. Blanda kortleken och dra två kort. Vad är sannolikheten för
   (a) att båda korten är klöver? (2p)
   (b) korten utgör ett par, givet att det första är ett ess? (2p)
2. Jane ska gifta sig imorgon mitt ute i Mojave-öknen. De senaste åren har det bara regnat 5 dagar per år där, men tyvärr säger väderprognosen att det blir regn imorgon. Väderprognosen är korrekt vid 90% av fallen, oavsett om man förutspår uppehåll eller regn. Vad är sannolikheten att det regnar på Janes bröllop? (5p)
3. I en fabrik tillverkas detaljer som sätts samman två och två till försäljningsenheter. Varje tillverkad detalj är felaktig med sannolikheten 0.1 oberoende av de andra. En försäljningsenhet ger fabrikanten vinsten 1 kr om båda detaljerna är korrekta, vinsten 0 kr om precis en av de båda detaljerna är felaktig och förlusten 10 kr (dvs vinsten -10 kr) om båda detaljerna är felaktiga. Beräkna den förväntade vinsten för en försäljningsenhet. (4p)
4. En liten båt som transporterar passagerare tvärs över ett smalt sund avgår från färjelägret en gång i timmen. Färjan är endast dimensionerad för 5 passagerare åt gången. Under rusningstid kommer passagerare till färjelägret oberoende av varandra enligt en Poissonprocess med i genomsnitt 4 personer i timmen.
   (a) Beräkna sannolikheten att det väntar fler än det tillåtna 5 vid färjelägret när färjan ska gå? Antag att passagerarna tåligt väntar kvar även om väntetiden är lång. (5p)
   (b) Antag nu att man låter färjan avgå så fort den har blivit full. Du kommer till färjelägret när det redan är tre passagerare där och väntar. Vad är sannolikheten att du får vänta mer än 10 min innan färjan avgår? (5p)
5. Ett konfidensintervall för den förväntade verkningsgraden hos en kamin anges till 87.25 ± 2.05 procent. Intervallet är baserat på ett stickprov om 10 kaminer där stickprovsvariansen beräknades till 22 procent. Vad är intervallets konfidentsgrad? (4p)
6. VDn för ett stort företag påstår att minst 80% av hans kunder är väldigt nöjda med företagets service. Vi tror honom inte men för att testa detta har vi tillfrågat 100 slumpmässigt valda kunder, varav 73% säger sig vara nöjda. Testa med lämpligt hypotestest på signifikansnivå $\alpha = 0.05$ om VD:ns påstående verkar stämma. (6p)

Var god vänd!

7. Kalcium (Ca) förekommer normalt i blodet hos alla däggdjur. Koncentrationen anses normalfördelad med genomsnitt $\mu = 6$ mg. För stor avvikelse från snittet kan leda till allvarliga störningar av t.ex. blodets koaguliseringsförmåga och musklernas funktion. På en grupp patienter med samma sjukdomskomplex uppmättes följande värden av kalciumkoncentration:

Patient	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ca-konc	3.57	2.33	4.13	4.29	2.85	5.19	5.18	3.96	4.33

där stickprovsmedelvärde och varians beräknats till $\bar{X} = 3.98$ och $s^2 = 0.914$.

(a) Bilda ett 95% konfidensintervall för kalciumkoncentrationen baserat på stickprovet. (5p)

(b) Baserat på intervallet i (a) och det givna väntevärdet, vad skulle ett hypotestest säga om kalciumkoncentrationen? (2p)

Del II: Flervariabelanalys

8. Uttryck $\dfrac{\partial}{\partial y}\big(f(x^2, xy, y^2)\big)$ i de partiella derivatorna av f. (3p)

9. Beräkna volymen av det område som begränsas av planet $z = 1$ och paraboloiden $z = 5 - x^2 - y^2$. (4p)

10. Antag att en partikels position i rummet vid varje tidpunkt t ges av $\mathbf{r}(t) = 2(t^3 - t)\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$. Bestäm partikelns acceleration i det ögonblick partikeln passerar planet $x + y + z = 1$ (3p)

Lycka till!

Lösningar

Del I: Matematisk Statistik

1. Vi drar två kort ur en kortlek:

   (a) Det finns 13 klöver och vi ska välja två, (dvs utan återläggning, ordningen kvittar)

   $$P(\text{båda klöver}) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{13!}{2!11!}}{\frac{52!}{2!50!}} = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} = \frac{78}{1326} = 0.059$$

   (b) En direkt lösning: vi har ett ess och ska dra ett till:

   $$P(\text{par}|\text{första ess}) = \frac{3}{51} = 0.059.$$

   En mer formell men ekvivalent lösning:

   $$\begin{aligned} P(\text{par}|\text{första ess}) &= \frac{P(\text{par i ess})}{P(\text{första ess})} \\ &= \frac{\binom{4}{2}/\binom{52}{2}}{\binom{4}{1}/\binom{52}{1}} \\ &= \frac{3}{51} = 0.059. \end{aligned}$$

2. Den här uppgiften är tyvärr dåligt formulerad och kan missförstås. Båda av följande två lösningar ger därför rätt:

   (i): man kan antingen tolka den som att sannolikheten som efterfrågas är redan given i uppgiften

   $$P(\text{det regnar på bröllopet}|\text{prognosen säger regn}) = 0.90.$$

   (ii): man kan också tolka uppgiften som det var tänkt, att om det regnar har prognosen haft rätt i 90% av fallen, och är det uppehåll har prognosen haft rätt i 90% av fallen. Då blir lösningen som följer:

   Låt

   $$\begin{aligned} A &= \text{regn imorgon} \\ B &= \text{prognosen säger regn} \end{aligned}$$

   Bayes formel ger

   $$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

   där

   $$\begin{aligned} P(A) &= \frac{5}{365} = 0.014 \\ P(A^c) &= 1 - P(A) = 0.984 \\ P(B|A) &= 0.9 \\ P(B|A^c) &= 0.1 \end{aligned}$$

   så vi får

   $$P(A|B) = \frac{0.9 \cdot 0.014}{0.9 \cdot 0.014 + 0.1 \cdot 0.986} = 0.11.$$

3. Låt X = antal korrekta enheter i ett par. Då blir $X \sim Bin(2, 0.9)$, dvs

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 0.1^2 = 0.01 \\ P(X = 1) &= 2 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.18 \\ P(X = 2) &= 0.9^2 = 0.81 \end{aligned}$$

och vi får

$$\text{Förväntad vinst} = -10 \cdot 0.01 + 0 \cdot 0.18 + 0.81 \cdot 1 = 0.71$$

4. Låt $N(t)$ = antal passagerare i $[0, t]$, där $N(t)$ är en Poissonprocess $Poi(\lambda t)$ med intensitet $\lambda = 4$.

   (a) Sannolikheten att det väntar fler än 5 vid färjelägret:

$$\begin{aligned} P(N(1) > 5) &= 1 - P(N(1) <= 5) = 1 - \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{\lambda}\lambda^x}{x!} \\ &= 1 - e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!}\right) \\ &= 0.215 \end{aligned}$$

   (b) Låt X = tiden mellan två passagerare. Då är $X \sim Exp(\lambda)$ där $\lambda = 4$ som förut.

$$\begin{aligned} P(X > 1/6) &= 1 - P(X \leq 1/6) \\ &= 1 - \int_0^{1/6} 4e^{-4x} dx \\ &= 1 - \left[-e^{-4x}\right]_0^{1/6} \\ &= 1 - (-e^{-2/3} + 1) = e^{-2/3} \\ &= 0.513 \end{aligned}$$

5. Vi har alltså ett konfidensintervall där

$$\mu = \bar{X} \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} = 87.25 \pm 2.05$$

där $n = 10$ och $s = \sqrt{22} = 4.69$, så

$$2.05 = t_{9,\alpha/2} \frac{4.69}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow t_{9,\alpha/2} = 1.382 \Leftrightarrow \alpha/2 = 0.10 \Leftrightarrow \alpha = 0.20$$

Dvs, konfidensintervallets konfidensgrad är $1 - \alpha = 0.8$.

6. Låt X = antal nöjda av 100. Då är X $Bin(100, p)$. Vi har observerat 73% nöjda och uppskattar parametern p med

$$\hat{p} = \frac{X}{100} = 0.73$$

Vi sätter upp hypotestestestet

$$\begin{aligned} H_0 &: p = p_0 \\ H_1 &: p < p_0 \end{aligned}$$

där $p_0 = 0.8$ och använder test-statistikan

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} = \frac{73 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8(1 - 0.8)}} = -1.75$$

Vi jämför med $N(0, 1)$-tabellen och får $z_{0.05} = -1.64$. Eftersom $Z_0 < -1.64$ förkastar vi H_0. VD:ns påstående verkar inte stämma.

7. Kalciumkoncentrationen

   (a) Ett 95% konfidensintervall för $n = 9$ när σ^2 okänd:

$$\begin{aligned} t_{n-1,\alpha/2} &= t_{8,0.025} = 2.306 \\ \mu &= \bar{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = 3.98 \pm 2.306\frac{\sqrt{0.914}}{\sqrt{9}} = 3.98 \pm 0.735. \end{aligned}$$

   (b) Vi förväntar oss en koncentration på 6 mg, men detta värde täcks inte av intervallet i (a), så ett hypotestest

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 6 \\ H_1 &: \mu \neq 6 \end{aligned}$$

   skulle förkasta H_0 på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Del II: Flervariabelanalys

8. $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f(x^2, xy, y^2)\right) = f_2'(x^2, xy, y^2) \cdot x + f_3'(x^2, xy, y^2) \cdot 2y$

9. Paraboloiden skär planet där $5 - x^2 - y^2 = 1$ dvs. $x^2 + y^2 = 4$, så området består av de punkter i rummet där $x^2 + y^2 \leq 4$ och som begränsas uppåt av paraboloiden $z = 5 - x^2 - y^2$ och neråt av planet $z = 1$. Volymen kan således beräknas med följande integral;

$$\iint_{x^2+y^2\leq 4} \left((5 - x^2 - y^2) - 1\right)\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4 - r^2\right) r\, drd\theta = 2\pi\left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^2 = 8\pi$$

10. Partikeln passerar planet vid den tidpunkt t då $2(t^3 - t) - t^3 + 2t = 1 \iff t^3 = 1 \iff t = 1$.
    Partikelns acceleration vid en viss tidpunkt t ges av $\mathbf{r}''(t) = 12t\mathbf{i} - 6t\mathbf{j}$ och speciellt vid tiden $t = 1$ är accelerationen $\mathbf{r}''(1) = 12\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$