

Tentamenskrivning för TMS063, Matematisk Statistik.

Tisdag em den 18 aug, 2015, V-huset.

Examinator: Marina Axelson-Fisk. Tel: 070-2288113

Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd miniräknare, tabell- och formelhäfte (utdelas).

\*\*\*\*\*

Tentan är på totalt 50 poäng: 40 poäng på matstat-delen, 10 poäng på flervariabel-delen. För att bli godkänd krävs godkänt på båda delarna. Betygsgränser för betyg 3, 4 och 5 är 40%, 60% och 80%, respektive. Betygen på de båda delarna vägs samman. **Fullständiga och välmotiverad lösningar skall ges till varje uppgift.**

#### Del I: Matematisk Statistik

1. Två vindkraftverk fungerar vid ett givet tillfälle oberoende av varandra med sannolikheterna 0.98 respektive 0.90.

- (a) Vad är sannolikheten att precis ett av de två kraftverken fungerar? (2p)
- (b) Ett av vindkraftverket (det med sannolikhet 0.98) ger effekten 50 kW, medan det andra ger 200 kW. Vad är väntevärdet av den sammanlagda effekten av de två vindkraftverken? (4p)

2. En hjälporganisation med 1000 medlemmar ber om bidrag på 50 kr eller 100 kr från sina medlemmar. Man uppskattar att det är lika vanligt att välja det högre som det lägre beloppet och att 20% av medlemmarna inte ger något bidrag alls. Beräkna, med hjälp av normalapproximation, sannolikheten att organisationen får in minst 58 000 kr. (6p)

3. Antag att en kontinuerlig stokastisk variabel  $X$  har fördelningsfunktion

$$F(x) = x^5, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- (a) Ange täthetsfunktionen  $f(x)$ . (3p)
- (b) Beräkna sannolikheten  $P(X > 0.5)$ . (3p)

4. Tiden mellan två större jordbävningar antas vara en exponentialfördelad stokastisk variabel  $Exp(\lambda)$ , där  $\lambda = 1.2$  år.

- (a) Vad är sannolikheten att det dröjer minst 5 år mellan två större jordbävningar? (4p)
- (b) Under en 20-årsperiod, vad är sannolikheten att det sker minst 2 större jordbävningar? (6p)

5. Vid kontroll av potatisskörden vill man undersöka hur stor andel av potatisen som fått skador, och konstaterade att i ett stickprov på 150 potatisar var 12 skadade. Vi låter  $X$  vara antal skadade potatisar bland 150 dragna.

- (a) Vilken fördelning har  $X$ ? (2p)
- (b) Beräkna en skattning av fördelningens parameter, och skattningens väntevärde och varians. (6p)
- (c) Beräkna ett tvåsidigt 95-% konfidensintervall för parametern. (4p)

**Var god vänd!**

Del II: Flervariabelanalys

6. Bestäm tangentplanet till funktionsytan  $z = 2x + e^{x^2-y}$  genom punkten  $(1, 1, 3)$ . (3p)

7. Härled formeln  $V = \frac{4\pi}{3}R^3$  för volymen  $V$  av ett klot med radie  $R$ . (4p)

Tips: Enklast härleds formeln med att ställa upp en trippelintegral och beräkna den med hjälp av sfärisk substitution. Alternativt går det också bra med en dubbelintegral och polär substitution.

8. Beräkna massan av den tunna tråd med konstant densitet  $\delta$  och som beskrivs av parametriseringen  $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}$ ,  $0 \leq t \leq 2$ . (3p)

**Lycka till!**

## Lösningar

### Del I: Matematisk Statistik

1. Två oberoende vindkraftverk I och II:

(a) Sannolikheten att precis ett kraftverk fungerar är

$$P(\text{precis ett}) = 0.98 \cdot (1 - 0.90) + (1 - 0.98) \cdot 0.90 = 0.116$$

(b) De möjliga situationerna och respektive effekt och sannolikheter är

Fungerande kraftverk	Total effekt	Händelsens sannolikhet
inget	0 kW	$0.02 \cdot 0.10 = 0.002$
bara I	50 kW	$0.98 \cdot 0.10 = 0.098$
bara II	200 kW	$0.02 \cdot 0.90 = 0.018$
båda	250 kW	$0.98 \cdot 0.90 = 0.882$

så väntevärdet blir

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_x x \cdot P(X = x) \\ &= 0 \cdot 0.002 + 50 \cdot 0.098 + 200 \cdot 0.018 + 250 \cdot 0.882 \\ &= 229 \end{aligned}$$

2. Låt  $X_i$  vara bidraget som ges av en slumpmässigt vald medlem  $i$ . För att kunna göra en normalapproximation behöver vi väntevärde och varians för  $X_i$ .

$$E[X_i] = 0.4 \cdot 50 + 0.4 \cdot 100 + 0.2 \cdot 0 = 60.$$

Variansen får vi genom att

$$E[X_i^2] = 0.4 \cdot 50^2 + 0.4 \cdot 100^2 + 0.2 \cdot 0 = 5000$$

och därmed

$$V(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = 5000 - 60^2 = 1400.$$

Nu låter vi

$$X = \sum_{i=1}^{1000} X_i$$

Då blir  $X \approx N(1000 \cdot 60, 1000 \cdot 1400) = N(60\,000, 1\,400\,000)$  och

$$Z = \frac{X - 60\,000}{\sqrt{1\,400\,000}} \approx N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 58\,000) &= P\left(\frac{X - 60\,000}{\sqrt{1\,400\,000}} \geq \frac{58\,000 - 60\,000}{\sqrt{1\,400\,000}}\right) \\ &= P(Z \geq -1.69) = 1 - P(Z \leq -1.69) \\ &= 1 - \Phi(-1.69) = 1 - 0.0455 \\ &= 0.9545 \end{aligned}$$

3. För den kontinuerliga stokastiska variabeln  $X$ .

(a)

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = 5x^4, \quad 0 \leq x \leq 1$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X > 0.5) &= 1 - P(X \leq 0.5) \\ &= 1 - F(0.5) \\ &= 1 - 0.03125 = 0.96875. \end{aligned}$$

4. Låt  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  där  $\lambda = 1.2$ .

(a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= \int_5^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= [-e^{-\lambda x}]_5^{\infty} \\ &= e^{-\lambda \cdot 5} = e^{-1.2 \cdot 5} = e^{-6} \\ &= 0.0025 \end{aligned}$$

(b) Låt  $N(t) =$  antal jordbävningar i  $[0, t]$ . Då är  $N(t)$  en Poissonprocess med intensitet  $\lambda = 1.2$ , så

$$\begin{aligned} P(N(20) \geq 2) &= 1 - P(N(20) < 2) \\ &= 1 - (P(N(20) = 0) + P(N(20) = 1)) \\ &= 1 - (e^{-1.2 \cdot 20} (1 + 1.2 \cdot 20)) \\ &= 1 - 25e^{-24} \approx 1 \end{aligned}$$

5.  $X =$  antal skadade potatisar bland 150

(a)  $X \sim \text{Bin}(150, p)$  där  $p = P(\text{skada})$ .

(b) Vi skattar  $p$  med andelen skadade i stickprovet, dvs

$$\hat{p} = \frac{12}{150} = 0.08.$$

Väntevärde och varians

$$\begin{aligned} E[\hat{p}] &= E\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{E[X]}{n} = \frac{np}{n} = p \\ \text{Var}(\hat{p}) &= \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\text{Var}(X)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

(c) Konfidensintervall för  $p$  ges av

$$p = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

där  $\alpha = 0.95$  och  $z_{\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$  och  $n = 150$ , dvs

$$p = 0.08 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.08(1-0.08)}{150}} = 0.08 \pm 1.96 \cdot 0.022 = 0.08 \pm 0.0434$$

Del II: Flervariabelanalys

6.