

Tentamenskrivning för TMS063, Matematisk Statistik.

Onsdag fm den 31 maj, 2017.

Examinator: Marina Axelson-Fisk. Tel: 031-7724996

Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd miniräknare, tabell- och formelhäfte (bifogas).

\*\*\*\*\*

Tentan är på totalt 40 poäng. För att bli godkänd krävs godkänt på tentan och godkänt på flervariabel-duggan. Betygsgränser för betyg 3, 4 och 5 är 40%, 60% och 80%, respektive. **Fullständiga och välmotiverad lösningar skall ges till varje uppgift.**

1. Låt  $A$  och  $B$  vara två händelser.
  - (a) Om  $P(A) = 0.25$ ,  $P(B) = 0.45$  och  $P(A \cap B) = 0.1$ , vad är  $P(A^c \cap B)$ ? (2p)
  - (b) Antag att  $P(A) = 0.4$ ,  $P(B) = 0.3$  och  $P((A \cup B)^c) = 0.42$ . Är  $A$  och  $B$  oberoende? (2p)
2. Ordet PAPPA kan kastas om på 10 olika sätt, men:
  - (a) på hur många sätt kan man permutera ordet OSANNOLIK? (2p)
  - (b) hur många unika 3-bokstavskombinationer kan man bilda av OSANNOLIK? (3p)
3. Antag att en buss som ska komma till en hållplats kl 12 varje dag alltid är försenad med  $X$  minuter, där  $X \sim \text{Exp}(0.3)$ . Antag att du anländer till hållplatsen precis kl 12.
  - (a) Vad är sannolikheten att du får vänta i minst 5 minuter? (3p)
  - (b) Antag att du redan har väntat i 10 minuter. Vad är sannolikheten att du får vänta i 5 minuter till? (3p)
4. Låt  $X$  och  $Y$  vara två kontinuerliga stokastiska variabler med gemensam täthetsfunktion
$$f(x, y) = cx^2y(1 + y) \text{ för } 0 \leq x \leq 3 \text{ och } 0 \leq y \leq 3.$$
  - (a) Beräkna värdet på konstanten  $c$ . (3p)
  - (b) Vad marginaltätheten och väntevärdet av  $X$ ? (5p)
  - (c) Är  $X$  och  $Y$  oberoende? (Motivera ditt svar!) (1p)

**Var god vänd!**

5. Låt  $X_1, X_2, \dots, X_{81}$  vara ett stickprov med väntevärde  $E[X_i] = 5$  och varians  $V(X_i) = 4$ . Vad blir det approximativa värdet på sannolikheten  $P(X_1 + X_2 + \dots + X_{81} > 369)$ ? (3p)
6. Antag att du drar ett stickprov av storleken 100 från en normalfördelning där  $\sigma = 8$ . Antag att du fick  $\bar{X} = 5$ .
- (a) Testa hypotesen  $H_0 : \mu = 3$  mot alternativet  $H_1 : \mu > 3$  på signifikansnivå  $\alpha = 0.05$ . (4p)
  - (b) Vad är  $p$ -värdet för ditt stickprov? (4p)
  - (c) Vad är styrkan på testet om det sanna värdet egentligen är  $\mu_0 = 4$ ? (5p)

**Lycka till!**

## Lösningar

1. För händelser  $A$  och  $B$ :

- (a)  $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.45 - 0.1 = 0.35$   
(b)  $A$  och  $B$  är oberoende om  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Och

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \text{ och} \\P(A \cup B) &= 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - 0.42 = 0.58 \\&\text{så} \\P(A \cap B) &= 0.4 + 0.3 - 0.58 = 0.12 \\P(A)P(B) &= 0.4 \cdot 0.3 = 0.12\end{aligned}$$

Svar: Ja,  $A$  och  $B$  är oberoende.

2. Ordet OSANNOLIK:

- (a) Ordet OSANNOLIK har  $n_1 = 2$  'O' och  $n_2 = 2$  'N' och kan permuteras på

$$\frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{9!}{2!2!} = 90'720 \text{ sätt.}$$

- (b) Det finns 7 unika bokstäver: OSANLIK. Av dessa kan man bilda (ordningen spelar roll, utan återläggning)

$$\frac{7!}{(7-3)!} = 210 \text{ unika ord}$$

Sedan kan ord med två 'O' bildas på  $3 \cdot 6 = 18$  sätt ('OOx' med 6 olika 'x' och 3 permutationer), och samma sak för ord med två 'N'. Så vi får

Svar:  $210 + 18 + 18 = 246$  olika 3-bokstavsord.

3.  $X \sim Exp(0.3)$

- (a)

$$P(X \geq 5) = \int_5^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_5^{\infty} = e^{-5\lambda} = 0.223$$

- (b) Exponentialfördelningen är minneslös

$$P(X \geq 15 | X > 10) = P(X \geq 5) = 0.223$$

Detta kan man anta direkt eller härleda genom

$$\begin{aligned}P(X \geq 15 | X \geq 10) &= \frac{P(X \geq 15, X \geq 10)}{P(X \geq 10)} = \frac{P(X \geq 15)}{P(X \geq 10)} = \\&= \frac{e^{-15\lambda}}{e^{-10\lambda}} = e^{-5\lambda} = P(X \geq 5) = 0.223\end{aligned}$$

4. Gemensam täthet

- (a) Vi vill att

$$\int_0^3 \int_0^3 f(x, y) dy dx = 1$$

så

$$\begin{aligned} c \int_0^3 \int_0^3 x^2 y(y+1) dy dx &= \\ &= c \int_0^3 x^2 \left[ \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_0^3 dx \\ &= \frac{27c}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 \\ &= \frac{27c}{2} 9 = c \frac{243}{2} \end{aligned}$$

Svar:  $c = \frac{2}{243} = 0.0082$

(b) Marginaltätet för  $X$ :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^3 f(x, y) dy = \frac{2}{243} x^2 \int_0^3 y(y+1) dy \\ &= \frac{2}{243} x^2 \left[ \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_0^3 \\ &= \frac{x^2}{9} \end{aligned}$$

så vi får

$$E[X] = \int_0^3 x f_X(x) dx = \int_0^3 \frac{x^3}{9} dx = \left[ \frac{x^4}{36} \right]_0^3 = \frac{9}{4}$$

(c) Ja,  $X$  och  $Y$  är oberoende eftersom vi kan skriva

$$f(x, y) = cx^2 y(y+1) = (c_1 x^2) \cdot (c_2 y(y+1))$$

och konstanterna  $c_1$  och  $c_2$  kan väljas så att marginalfördelningarna integreras till 1.

5. Centrala gränsvärdesatsen ger att

$$Y = \sum_{i=1}^{81} X_i \approx N(81 \cdot 5, 81 \cdot 4) = N(405, 324)$$

så vi får att om  $\Phi$  betecknar fördelningsfunktion för  $N(0, 1)$

$$\begin{aligned} P(Y > 369) &= 1 - P(Y \leq 369) \\ &= 1 - P\left(\frac{Y - 405}{\sqrt{324}} > \frac{369 - 405}{\sqrt{324}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{36}{18}\right) \\ &= \Phi(2) = 0.977 \end{aligned}$$

6. Vi har att  $n = 100$ ,  $\bar{X} = 5$  och variansen är känd och  $\sigma^2 = 4$ .

(a) Test-statistika

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5 - 3}{8/10} = 2.5$$

och  $z_{0.95} = 1.645$  så vi kan förkasta  $H_0$ .

- (b)  $p$ -värdet för stickprovet är sannolikheten att få vårt värde på  $\bar{X}$  eller extremare om  $H_0$  är sann, dvs

$$\begin{aligned} p &= P(\bar{X} \geq 5) \\ &= 1 - P(\bar{X} \leq 5) \\ &= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - 3}{8/10} \leq \frac{5 - 3}{8/10}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.994 = 0.006 \end{aligned}$$

- (c) Styrkan i testet ges av

$$1 - \beta = P(\text{förekasta } H_0 | H_0 \text{ falsk})$$

Vi förkastar  $H_0$  om  $Z_0 > 1.645$ , dvs om

$$\frac{\bar{X} - 3}{8/10} > 1.645 \Leftrightarrow \bar{X} > 4.316$$

så styrkan i testet blir

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\bar{X} > 4.316 | \mu = 4) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - 4}{8/10} > \frac{4.316 - 4}{8/10}\right) \\ &= 1 - P(Z_0 \leq 0.40) \\ &= 1 - \Phi(0.40) = 1 - 0.655 \\ &= 0.345 \end{aligned}$$