Tentamenskrivning för TMS063, Matematisk Statistik.
Tisdag em den 15 aug, 2017.
Examinator: Marina Axelson-Fisk. Tel: 031-7724996
Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd miniräknare, tabell- och formelhäfte (bifogas).
****

Tentan är på totalt 40 poäng. För att bli godkänd krävs godkänt på tentan och godkänt på båda flervariabel-duggorna. Betygsgränser för betyg 3, 4 och 5 är 40% (16p), 60% (24p) och 80% (32p), respektive. **Fullständiga och välmotiverad lösningar skall ges till varje uppgift.**

1. Antag att A och B är två händelser där $P(A) = 0.01$, $P(B) = 0.30$ och $P(B|A) = 0.40$.
   (a) Vad är $P(A \cap B)$? (2p)
   (b) Vad är $P(A|B)$? (2p)
2. Ur en urna med 5 vita, 3 svarta och 7 blå kulor drar man 5 kulor. Vad är sannolikheten att alla 5 kulorna är blå om:
   (a) vi drar utan återläggning? (3p)
   (b) vi drar med återläggning? (3p)
3. Antag att en person som köper biljett till ett evenemang får köpa max tre biljetter, och att hen köper en biljett med sannolikheten 0.2 och två biljetter med sannolikheten 0.7. Vad blir väntevärde och varians för antal biljetter en person köper? (5p)
4. På en institution brygger man 7.5 liter kaffe varje arbetsdag. 18 personer dricker kaffe två gånger om dagen, och mängden kaffe varje drucken kopp kan antas oberoende stokastiska variabler med väntevärde 2 dl och standardavvikelse 0.2 dl. För en slumpmässigt vald dag:
   (a) Vad är sannolikheten att det blir kaffe över? (4p)
   (b) Hur mycket kaffe behöver man brygga för att det ska räcka till 95%?(4p)
5. Låt X och Y ha följande gemensamma täthetsfunktion

		Y		
		1	2	3
	2	0.16	0.09	0.18
X	4	0.10	0.08	0.16
	6	0.09	0.06	0.08

   (a) Vad är sannolikheten $P(X + Y < 6)$? (3p)
   (b) Vad är kovariansen $Cov(X, Y)$? (4p)
   (c) Är X och Y oberoende? (Motivera.) (1p)
6. Låt $X_1, .., X_{25}$ vara ett stickprov från $N(\mu, 1)$. Vi testar hypotesen $H_0 : \mu = 0$ mot $H_1 : \mu > 0$ genom att förkasta H_0 om $\bar{X} \geq 0.4$.
   (a) Vad är testets signifikansnivå? (4p)
   (b) Vad är testets styrka om det sanna värdet är $\mu = 0.5$? (5p)

Lycka till!

Lösningar

1. $P(A) = 0.01$, $P(B) = 0.30$, $P(B|A) = 0.40$:

   (a)

   $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.40 \cdot 0.01 = 0.004$$

   (b) Använd Bayes formel eller resultatet i (a):

   $$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.40 \cdot 0.01}{0.30} = 0.01333$$

2. Det finns 7 blå kulor och 15 kulor totalt.

   (a) Vi drar utan återläggning och där ordningen kvittar och får sannolikheten

   $$P(5 \text{ blå}) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{15}{5}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{1}{143} = 0.007$$

   (b) Med återläggning blir sannolikheten

   $$P(5 \text{ blå}|\text{återläggning}) = \left(\frac{7}{15}\right)^5 = 0.022$$

3. Låt X = antal biljetter så att $X \in 1, 2, 3$ med sannolikheter 0.2, 0.7 och 0.1, respektive. Väntevärdet bli

   $$E[X] = \sum_{x=1}^{3} x \cdot P(X = x) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.7 + 3 \cdot 0.1 = 1.9$$

   Varians

   $$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

   och

   $$E[X^2] = sum_{x=1}^{3} x^2 \cdot P(X = x) = 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.7 + 3^2 \cdot 0.1 = 3.9$$

   så vi får

   $$V(X) = 3.9 - 1.9^2 = 0.29$$

4. Vi har 18 personer och två tillfällen, dvs 36 tillfällen (som antas oberoende) på en dag. Låt

   $$X_i = \text{mängd kaffe vid tillfälle } i, \; i = 1, ..., 36$$

   Vi har att $E[X_i] = 0.2$ och $V(X_i) = 0.2^2$ Låt

   $$Y = \sum_{i=1}^{36} X_i$$

   (a) Centrala gränsvärdessatsen ger att $Y \approx N(36 \cdot 0.2, 36 \cdot 0.2^2) = N(7.2, 1.2^2)$. Så sannolikheten att det blir kaffe kvar en slumpmässigt vald dag ges av

   $$\begin{aligned} P(Y < 7.5) &= P\left(\frac{Y - 7.2}{1.2} < \frac{7.5 - 7.2}{1.2}\right) \\ &= \Phi(0.25) = 0.5987 \end{aligned}$$

(b)

$$P(Y \le y) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\frac{Y-7.2}{1.2} \le \frac{y-7.2}{1.2}\right) = 0.95$$

och normalfördelningstabell ger

$$\Phi(z) = 0.95 \Leftrightarrow z = 1.645$$

dvs

$$\frac{y-7.2}{1.2} = 1.645 \Leftrightarrow y = 1.645 \cdot 1.2 + 7.2 = 9.174$$

5. (a)

$$\begin{aligned} P(X+Y<6) &= P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)+ \\ &\quad +P(X=2,Y=3)+P(X=4,Y=1) \\ &= 0.16+0.09+0.18+0.10 = 0.53 \end{aligned}$$

(b) Kovariansen ges av

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

där

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_x x \cdot f_X(x) = \sum_x \sum_y x \cdot f_{XY}(x,y) \\ E[Y] &= \sum_y y \cdot f_Y(y) = \sum_x \sum_y y \cdot f_{XY}(x,y) \end{aligned}$$

Marginaltätheterna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$ ges av

		Y 1	2	3	$f_X(x)$
X	2	0.16	0.09	0.18	0.43
	4	0.10	0.08	0.16	0.34
	6	0.09	0.06	0.08	0.23
	$f_Y(y)$	0.35	0.23	0.42	

Så vi får

$$\begin{aligned} E[X] &= 2\dot{0}.43 + 4 \cdot 0.34 + 6 \cdot 0.23 = 3.6 \\ E[Y] &= 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.23 + 3 \cdot 0.42 = 2.07 \\ E[XY] &= \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot f_{XY}(x,y) = \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 0.16 + 2 \cdot 1 \cdot 0.09 + ... + 6 \cdot 3 \cdot 0.08 = 7.42 \end{aligned}$$

och kovariansen blir

$$Cov(X,Y) = 7.42 - 3.6 \cdot 2.07 = -0.032$$

(c) Nej, eftersom $Cov(X,Y) \neq 0$.

6. (a) Eftersom variansen är känd använder vi test-statistika

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

där $\mu_0 = 0$, $\sigma = 1$, $n = 25$. Vi förkastar när $\bar{X} \geq 0.4$, dvs om

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{0.4 - 0}{1/\sqrt{25}} = 2$$

och normalfördelningstabell ger att

$$P(Z_0 \geq 2) = 1 - P(Z_0 \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Så signifikansnivån för ett test som förkastar när $\bar{X} \geq 0.4$ har signifikansnivå $\alpha \approx 0.023$.

(b) Styrkan ges av

$$1 - \beta = P(\text{förkasta } H_0 | H_0 \text{ falsk})$$

Vi förkastar om $\bar{X} \geq 0.4$ så om det sanna väntevärdet är $\mu = 0.5$ får vi att styrkan är

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\bar{X} \geq 0.4 | \mu = 0.5) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - 0.5}{1/\sqrt{25}} \geq \frac{0.4 - 0.5}{1/\sqrt{25}}\right) \\ &= 1 - P(Z_0 \leq -0.5) \\ &= 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) = 0.6915 \end{aligned}$$