Tentamenskrivning för TMS063, Matematisk Statistik.
Fredag fm den 15 aug, 2017.
Examinator: Marina Axelson-Fisk. Tel: 031-7724996
Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd miniräknare, tabell- och formelhäfte (bifogas).

****

Tentan är på totalt 40 poäng. För att bli godkänd krävs godkänt på tentan och godkänt på båda flervariabel-duggorna. Betygsgränser för betyg 3, 4 och 5 är 40% (16p), 60% (24p) och 80% (32p), respektive. **Fullständiga och välmotiverad lösningar skall ges till varje uppgift.**

1. Vi kastar två tärningar och låter
   $A =$ summan blir 3
   $B =$ summan blir 4
   $C =$ minst en tärning är en tvåa
   (a) Vad blir den betingade sannolikheten $P(A|C)$? (3pt)
   (b) Vad blir den betingade sannolikheten $P(B|C)$? (3pt)
   (c) Är A och B oberoende (motivera)? (1pt)
   (d) Är B och C oberoende (motivera)? (1pt)
2. Sex män och sju kvinnor deltar i en danskurs.
   (a) Först hälsar alla på varandra genom att ta i hand. Hur många handskakningar innebär detta? (2pt)
   (b) Hur många distinkta grupper om fyra danspar med man-kvinna kan man bilda? (4pt)
3. Antalet rapporterade fel från en produktionsprocess antas vara Poissonfördelat med i genomsnitt 3.2 fel per dygn.
   (a) Vad är sannolikheten att antalet fel ett givet dygn överstiger 5 fel? (4pt)
   (b) Vad är sannolikheten att tiden till första felet överstiger 12 timmar? (4pt)
4. Antag att $X_1, ..., X_n$ är ett stickprov från en exponentialfördelning. Vad blir Maximum Likelihood-skattningen av variansen för X_i? (5pt)
5. En amerikansk tuggummi-tillverkare hävdar att deras tuggummin har tjockleken 7.5 hundradels tum. En kvalitetskontrollant drar ett stickrpov ur produktionen och observerar följande tjocklekar:

7.65	7.60	7.65	7.70	7.55
7.55	7.40	7.40	7.50	7.50

   Antag att tjockleken är normalfördelad och kontrollera tillverkarens påstående med ett lämpligt hypotestest på signfikansnivå $\alpha = 0.05$.
   (Beräkningshjälp: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 75.5$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 570.12$.) (5pt)
6. Volymen i vinflaskor antas vara normalfördelad enligt $N(\mu, 25)$. Antal att du drar ett stickprov på 10 flaskor och får medelvärdet 76.2 ml.
   (a) Beräkna ett 95%-konfidensintervall för väntevärdet μ. (4pt)
   (b) Hur många vinflaskor behöver du för att få ett 99%-konfidensintervall med samma bredd? (4pt)

Lycka till!

Lösningar

1. Minst en tärning är en tvåa är alla händelser utom $\{1,1\}$
   (a) Summan blir 3: $\{1,2\}$, $\{2,1\}$
   $$P(A|C) = \frac{P(A,C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{35}{36}}\frac{2}{35} = 0.057$$
   (b) Summan blir 4: $\{1,3\}$, $\{2,2\}$, $\{3,1\}$
   $$P(B|C) = \frac{P(B,C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{35}{36}} = \frac{1}{35} = 0.029$$
   (c) Nej. $P(A)P(B) = \frac{2}{36}\cdot\frac{3}{36}$ men $P(A,B) = 0$.
   (d) Nej. $P(B)P(C) = \frac{3}{36}\cdot\frac{35}{36}$ men $P(B,C) = \frac{1}{36}$.
2. (a) Vi drar två av $6+7=13$ utan återläggning och ordningen kvittar, dvs vi får $\binom{13}{2} = 78$ handskakningar.
   (b) Nu får vi utan återläggning men ordningen spelar roll, eftersom en grupp om fyra män och fyra kvinnor kan bilda 4! distinkta par-formationer. Antalet grupper om fyra danspar blir alltså
   $$\frac{6!}{(6-4)!}\cdot\frac{7!}{(7-4)!} = 302'400 \text{ danspar.}$$
3. Här har vi en Poissonprocess där enheten är dygn, och intensiteten är $\lambda = 3.2$.
   (a)
   $$\begin{aligned} P(N(1)>5) &= 1 - P(N(1)\le 4) = 1 - e^{-3.2}\left(1 + 3.2 + \frac{3.2^2}{2!} + \frac{3.2^3}{3!} + \frac{3.2^4}{4!}\right) \\ &= 0.219 \end{aligned}$$
   (b) Tiden X_1 till första felet är fördelad som $Exp(\lambda)$ och 12 timmar är ett halvt dygn så
   $$\begin{aligned} P(X_1 > 0.5) &= \int_{0.5}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-lambdax}\right]_{0.5}^{\infty} = \\ &= 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-3.2\cdot 0.5} = 1 - 0.202 = 0.798 \end{aligned}$$
4. Variansen för en $Exp(\lambda)$-fördelning är $1/\lambda^2$. ML-skattningen för λ:
   $$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \\ l(\lambda) &= \ln L(\lambda) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \frac{dl}{d\lambda} &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} \Leftrightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}} \end{aligned}$$
   Så ML-skattningen av variansen blir
   $$V(\hat{X}) = \frac{1}{\hat{\lambda}^2} = \bar{x}^2$$

5. Vi vill testa hypotesen

$$H_0 : \mu = 7.5$$
$$H_1 : \mu \neq 7.5$$

på signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Variansen är inte given så vi får använda att t-test med teststatistikan

$$T_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Stickprovsmedelvärde och stickprovsvarians

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{75.5}{10} = 7.55 \\ s^2 &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{10-1}(570.12 - 10 * 7.55^2) = 0.01056 \\ s &= 0.103 \end{aligned}$$

Så vi får

$$T_0 = \frac{7.55 - 7.5}{0.103/\sqrt{10}} = 1.539$$

och $t_{9,0.975} = 2.262 > T_0$ så vi kan inte förkasta tillverkarens påstående.

6. (a) Ett två-sidigt $(1-\alpha)$-konfidensintervall för μ, där variansen är känd ges av

$$\mu = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 75.12 \pm 1.96\frac{5}{\sqrt{10}} = 76.2 \pm 3.099$$

(b) Vi vill alltså att $1 - \alpha = 0.99$ och

$$z_{0.005}\frac{5}{\sqrt{n}} = 3.099 \Leftrightarrow n = \left(\frac{z_{0.005} \cdot 5}{3.099}\right)^2$$

dvs

$$n = \left(\frac{2.58 \cdot 5}{3.099}\right)^2 = 17.32$$

Dvs man behöver minst 18 flaskor för att få ett 99%-intervall av samma bredd.