Matematisk statistik TMS064
Dugga 2 2019-05-23

Examinator: Olof Elias
Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare och bifogade formelblad och fördelningstabeller
Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!
Namn: _____

Personnummer: _____

Varje uppgift är värd 4 poäng. Duggan kan ge bonus poäng på tentan. För 1 bonus poäng krävs 6 poäng, för 2 poäng krävs 9 poäng.

1. Låt X vara en stokastisk variabel och låt $Y = aX + b$, där $a \neq 0$.

   (a) Beräkna korrelationen mellan X och Y. **2 poäng**

   (b) Antag att X har fördelning $P(X = i) = 1/3$ för $i = 1, 2, 3$. Vad har den stokastiska vektorn $Z = (X, Y)$ för täthet? Vad har Y för marginaltäthet? **1 +1 poäng**

   Lösing:
   Del (a) följer av observervationen:

$$\mathrm{Cov}(Y, X) = \mathrm{Cov}(aX + b, X) = \mathrm{Cov}(aX, X) = a\,\mathrm{Var}(X)$$

   vilket ger

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(Y, X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{a\,\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{a^2\,\mathrm{Var}(X)^2}} = \frac{a}{|a|}$$

   Del (b) följer av att observera att $X = i$ om och endast om $Y = ai + b$ vilket ger att

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 1/3, & \text{om } y = ax + b \text{ och } x = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

   Vidare så ger samma resonemang att:

$$P(Y = y) = \sum_{x=1}^{3} P(Y = y, X = x) = \begin{cases} 1/3, & \text{om } y = a + b,\ y = 2a + b,\ y = 3a + b, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

2. Låt $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ bestäm maximum likelihood skattaren av λ givet ett observerat stickprov $x = (x_1, ..., x_n)$. **4 poäng**
Lösning: Då $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ så vet vi att X har täthet

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Likelihood funktionen ges därmed av

$$L(\lambda|x) = \prod_1^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\lambda^{\sum_1^n x_i}\prod_1^n \frac{1}{x_i!}$$

och log-likelihood funktionen ges av

$$\ell(\lambda|x) = -n\lambda + \log(\lambda)\sum_1^n x_i + c(x)$$

där $c(x)$ är en konstant som endast beror på x. Maxmimum-likelihood skattaren ges av det λ som maximerar $\ell(\lambda|x)$. Deriverar vi $\ell(\lambda|x)$ så får vi

$$\ell'(\lambda|x) = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_1^n x_i$$

vilket ger att maximat, λ_{ML}, löser ekvationen

$$\ell'(\lambda_{ML}|x) = 0 \Leftrightarrow -n + \frac{1}{\lambda_{ML}}\sum_1^n x_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_{ML} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

3. Låt $x = (x_1, ..., x_n)$ vara ett observerat stickprov från $N(\mu, \sigma^2)$ med stickprovsvarians $s^2 = 17.2611$ och stickprovsstorlek $n = 25$.

   (a) Beräkna ett två-sidigt konfidensintervall för σ^2 med signifikansnivå $\alpha = 0.1$. **2 poäng**

   (b) Testa hypotesen

$$H_0 : \sigma = 3,$$
$$H_1 : \sigma \neq 3.$$

   med hjälp av konfidensintervallet i (a). **2 poäng**

Lösning: OBS: I formelsamlingen stod det fel, detta har korrigerats! Konfidensintervallet ges av

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1,\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}}$$

och ur Table IV fås

$$\chi_{24,0.05} = 36.42, \chi_{24,0.95} = 13.85$$

vilket ger konfidensintervall

$$I_\alpha \approx [11.37, 29.91].$$

Eftersom $9 \notin I_\alpha$ så förkastar vi H_0 med en signifikansnivå $\alpha = 0.1$.