Matematisk statistik TMS064
Dugga 1 2019-05-07

Examinator: Olof Elias
Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare och bifogade formelblad och fördelningstabeller
Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!
Namn: _____

Personnummer: _____

Varje uppgift är värd 4 poäng. Duggan kan ge bonus poäng på tentan. För 1 bonus poäng krävs 6 poäng, för 2 poäng krävs 9 poäng.

1. Låt $A, B, C \subseteq \Omega$ vara tre händelser som uppfyller

$$A \cap B = \emptyset,\ A \cap C \neq \emptyset,\ B \cap C \neq \emptyset.$$

Antag att

$$P(A) = 0.1,\ P(B) = 0.2,\ P(C) = 0.3,\ P(A \cap C) = 0.01,\ P(B \cap C) = 0.01.$$

Beräkna

(a) Sannolikheten att A eller B inträffar. **1 poäng**

(b) Sannolikheten att A inträffar men inte C. **1 poäng**

(c) Sannolikheten att A eller B inträffar men inte C. **2 poäng**

Ledning: Rita ett Venn-diagram över händelserna
Lösning: Efter att man ritat en Venn-diagram så ser man följande:

(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.1 + 0.2 = 0.3.$

(b) $P(A \cap C^c) = P(A) - P(A \cap C) = 0.1 - 0.01 = 0.09.$

(c)

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cap C^c) &= P\left((A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)\right) \\ &= P(A) - P(A \cap C) + P(B) - P(B \cap C) \\ &= 0.1 - 0.01 + 0.2 - 0.01 = 0.09 + 0.19 = 0.28. \end{aligned}$$

2. Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med fördelningsfunktion $P(X \leq x) = F(x)$ som är definerad enligt

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Beräkna väntevärdet och variansen av X. **4 poäng**
Lösning: För att beräkna väntevärdet och variansen beräknar vi tätheten f först:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Detta ger

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^1 x 2x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 2/3.$$

För att beräkna variansen måste vi beräkna 2:a momentet av X:

$$\mathrm{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 2x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{2x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Variansen fås därefter genom

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{1}{18}$$

3. Ett torskbestånd utanför Reykjavik har uppskattats ha en genomsnittsvikt på 10 kg med standardavvikelse 2.6 kg. Beräkna (approximativt) sannolikheten att totalvikten av 100 slumpmässigt utvalda torskar ur populationen:

   (a) överstiger 1050 kg? **2 poäng**

   (b) väger mer än 1010 kg eller mindre än 910kg? **2 poäng**

   Lösning: Låt X vara totalvikten av 100 individer, enligt centrala gränsvärdessatsen gäller då

$$X \overset{approx}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

   där $\mu = 100 \cdot 10 = 1000$ och $\sigma^2 = 100 \cdot 2.6^2$. För (a) söker vi:

$$P(X > 1050) = P\left(Z > (1050 - 1000)/\sqrt{100 \cdot 2.6^2}\right) \approx P\left(Z > 1.923)\right) \approx 1 - 0.972 = 0.028 \tag{1}$$

   För (b), notera att händelserna

$$\{X > 1010\} \text{ och } \{X < 910\}$$

   är disjunkta.

   Vi söker:

$$P(\{X > 1010\} \cup \{X < 910\}) = P(X > 1010) + P(X < 910)$$
$$= P\left(Z > (1010 - 1000)/\sqrt{100 \cdot 2.6^2}\right) + P\left(Z < (910 - 1000)/\sqrt{100 \cdot 2.6^2}\right)$$
$$\approx P(Z > 0.384) + P\left(Z < -3.46\right) = 0.648 + 0.00027 = 0.64827$$