Matematisk statistik TMS063
Tentamen 2019-06-05

Tid: 8:30-12:30 **Tentamensplats:** M
Hjälpmedel: Bifogad formelsamling och tabell samt Chalmersgodkänd räknare.
Kursansvarig: Olof Elias
Telefonvakt/tentarond: Oskar Allerbo, Ankn: 5325. Till salen ca 9.30 och 11.30
Betygsgränser: För betyg **3**, **4** resp. **5** krävs minst **12**, **18** resp. **24** poäng.
För att bli godkänd på kursen krävs godkänt på tentan **och** godkänt resultat på båda flervariabel-duggorna.
Till varje uppgift skall fullständig och välmotiverad lösning lämnas!

---

1. I en vanlig kortlek finns det 52 kort, 4 färger (hjärter, ruter, klöver och spader), med 13 olika valörer (2-10, knekt, dam, kung, och ess) per färg.

   (a) På hur många sätt kan man bilda en pokerhand, d.v.s. hur många kombinationer av 5 kort finns det i en kortlek med 52 kort? **2 poäng**

   (b) Vad är sannolikheten att man drar en triss? (En triss är en korthand bestående av 3 kort av samma typ och där de två resterande korten är av olika valörer.) **2 poäng**

Figur 1: Ett exempel på en triss

   (c) Givet att man har dragit en triss, vad är sannolikheten att trissen består av ess? **1 poäng**

Lösning:

(a) Antalet pokerhänder ges av $\binom{52}{5} = 2598960$.

(b) Antalet sätt man kan bilda en triss på ges av följande resonemang.
1. Först drar vi en valör. Det finns 13 st. valörer vilket ger oss att vi kan välja denna valör på $\binom{13}{1} = 13$ olika sätt.
2. Av denna valör drar vi 3 st. Det 4 olika färger vilket ger oss att vi kan välja dessa 3 kort på $\binom{4}{3} = 4$ olika sätt.
3. Därefter drar vi 2 ytterligare valörer som är skilda från den första. Det finns 12 st valörer vilket ger oss att vi kan välja denna valör på $\binom{12}{2} = 66$ olika sätt.
4. Av dessa två valörer drar vi ett kort vardera. Det finns 4 olika färger av vardera valör vilket ger oss att vi kan välja vardera kort på $\binom{4}{1} = 4$ olika sätt. Så vi kan välja dessa två valörer på $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 4 \cdot 4 = 16$ sätt p.g.a. multiplikationsregeln.
Slutligen så fås antalet sätt man kan bilda en triss på m.h.a. multiplikationsregeln

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 13 \cdot 4 \cdot 66 \cdot 4 \cdot 4 = 54912$$

(c) Sannolikheten fås av

$$P(\text{ Triss }) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{54912}{2598960} \approx 0.021$$

(d) Vi söker

$$P(\text{Triss bestående av ess } | \text{Triss}) = P(\text{Triss bestående av ess } \cap \text{ Triss})/P(\text{ Triss })$$
$$= \frac{\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}}{\frac{\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}} = 1/13.$$

2. En fiskare går varje söndag under sommaren och fiskar i sin favoritsjö. Antalet fiskar som fångas vid varje tillfälle antags vara oberoende och följer en Poissonfördelning med $\lambda = 1$. Antalet söndagar under sommaren kan antas vara 12 st.

   (a) Vad är sannolikheten att fiskaren vid 10 av dessa söndagar fångar minst en fisk? **2 poäng**

   (b) Vad är det förväntade antalet fångade fiskar under hela sommaren? **1 poäng**

   (c) Antag nu istället att fiskaren fiskar varje söndag under ett år. Beräkna approximativt sannolikheten att totala antalet fiskar som fångas är minst 55 st. Antag att det finns 52 söndagar under året. **2 poäng**

Lösning : Låt X vara antalet fiskar man fångar vid ett av tillfällena. Sannolikheten att man fångar minst en fisk vid ett tillfälle ges då av

$$P(X \geq 1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} =: p,$$

då antalet fiskar är Poisson fördelat med parameter $\lambda = 1$. Eftersom antalet fiskar som fångas vid varje tillfälle är oberoende så innebär det att antalet tillfällen man fångar minst en fisk är binomialfördelat med $n = 12$ och $p = 1 - \mathrm{e}^{-1}$. Detta ger att

följer det att sannolikheten vi söker i 1 ges av

$$P\left(\text{Minst en fisk vid 10 av tillfällena }\right) = \binom{12}{10} p^{10}(1-p)^2.$$

Låt $X_1, ..., X_{12}$ vara antalet fiskar man fångar vid varje tillfälle. Det förväntade antalet fångade fiskar ges då av

$$\mathrm{E}\left[X_1 + ...X_{12}\right] = 12 \cdot \mathrm{E}[X_1] = 12 \cdot 1.$$

Låt T vara totala antalet fiskar som fångas under ett år. Vi ser att

$$\mathrm{E}[T] = 52, \mathrm{Var}(T) = 52$$

vilket gör att sannolikheten vi söker ges av

$$P(T \geq 55) \approx P(Z \geq \frac{55-52}{\sqrt{52}}) = P(Z \geq 0.0577) \approx 0.52$$

3. Låt $Z = (X, Y)$ vara en kontinuerlig stokastisk vektor med täthet

$$f(x, y) = c\sin(2x)\cos(y), 0 \leq x, y \leq \pi/2,$$

där c är en konstant som gör att f är en täthet.

(a) Bestäm c. **1 poäng**

(b) Visa att X och Y är oberoende. **2 poäng**

Lösning: c bestäms av

$$c = \left(\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{-1} = 1.$$

Att X och Y är oberoende ses direkt då

$$f(x, y) = g(x)h(y).$$

4. Antalet personer som anländer per minut till en mottagning kan beskrivas med en Poisson process. Man antar att sannolikheten att man måste vänta mer än 2 minuter tills att nästa person anländer är 1/4.

(a) Vad är den förväntade tiden man måste vänta tills att nästa person anländer? **2 poäng**

(b) Vad är sannolikheten att minst en person anländer under de första 10 minuterna? **2 poäng**

Lösning: Först behöver man bestämma intensiteten. Den ges av följande. Låt X vara tiden tills att nästa person anländer. Då gäller att $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ och

$$\mathrm{e}^{-\lambda 2} = P(X \geq 2) = 1/4 \Leftrightarrow \lambda = \log(4)/2.$$

Vilket ger att

$$\mathrm{E}[X] = 2/\log(4).$$

Sannolikheten att minst en person anländer ges av

$$P(N(10) \geq 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda 10} = 1 - \mathrm{e}^{-5\log(4)}.$$

5. Låt X vara en stokastisk variabel med $\mu = \mathrm{E}[X]$ och låt $(X_1, ..., X_n)$ vara ett stickprov av X. Visa att stickprovsmedelvärdet är en väntevärdesriktig skattare av μ. **2 poäng**

Lösning :

Att visa att $\bar{X}$ är väntevärdesriktig fås av följande. Låt $X = (X_1, ..., X_n)$ vara ett stickprov från X. Vi vill då visa

$$\mathrm{E}\left[\bar{X}\right] = \mu.$$

En kort uträkning ger:

$$\mathrm{E}\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[\sum_1^n X_i\right] = \frac{1}{n}n\,\mathrm{E}[X_1] = \mu.$$

6. Låt $x = (x_1, ..., x_n)$ vara ett observerat stickprov från en normalfördelad variabel med $\sigma = 1$, med $n = 20$ och $\bar{x} = 1.6646$. Betrakta följande hypoteser:

$$H_0 : \mu = 1,$$
$$H_1 : \mu > 1.$$

(a) Beräkna ett undre begränsat konfidensintervall vid en signifikansnivå $\alpha = 0.01$. **2 poäng**

(b) Beräkna p-värdet för testet och förkasta vid en signifikansnivå $\alpha = 0.01$. **3 poäng**

(c) Skissa grafen av styrkan av testet som en funktion av μ samt beräkna styrkan vid $\mu = 1.5$ vid en signifikansnivå $\alpha = 0.01$. **2 poäng**

Lösning: Uppgift (a) ges av:

$$\left[\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) \approx [1.14, \infty).$$

Uppgift (b) fås av följande. Låt

$$t_{obs} = (\bar{x} - 1)/\sqrt{\sigma^2/n} = 2.9722$$

vilket ger

$$p = 1 - \Phi(t_{obs}) = 1 - 0.998511 < 0.01$$

och vi förkastar därmed H_0.

Styrkan ges av

$$P\left(\text{Förkasta } H_0 | H_0 \text{ falsk }\right) = 1 - \beta(\mu)$$

där β är sannolikheten att man gör ett typ 2 fel. Om vi nu låter

$$T = \frac{\bar{X} - 1}{\sigma/\sqrt{n}}$$

och vi "vet" att H_1 är sann, dvs att väntevärdet är μ_1 så ser vi att

$$\mathrm{E}[T] = \sqrt{n}(\mu_1 - 1) = \sqrt{20}/2 = 2.2361, \mathrm{Var}(T) = 1,$$

dvs

$$T \sim N(\sqrt{20}(\mu_1 - 1), 1).$$

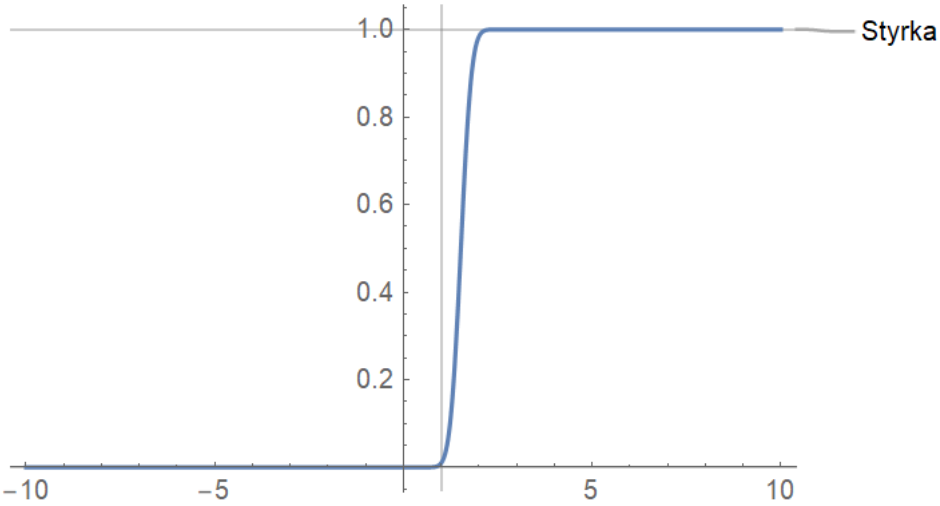
Från detta ser vi att styrkan som en funktion av μ ges av

$$P\left(T \geq z_\alpha\right) = P\left(N(0,1) \geq z_\alpha - \sqrt{20}(\mu_1 - 1)\right).$$

Vid $\mu_1 = 1.5$ ges styrkan av

$$P\left(T \geq z_\alpha\right) = P(N(0,1) \geq 2.3260 - 2.2361)) = P(N(0,1) \geq 0.0899) \approx 0.4642.$$

Styrkan som en funktion av μ blir då:



7. Låt $x = (x_1, ..., x_n)$ och $y = (y_1, ..., y_m)$ vara två oberoende stickprov från $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ respektive $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, med

$$\bar{x} = 1.6203, \bar{y} = 0.6085, s_X^2 = 2.7423, s_Y^2 = 1.3855, n = 15, m = 20.$$

Undersök om väntevärdena är lika under antagandet att $\sigma_X = \sigma_Y$ vid en signifikansnivå $\alpha = 0.05$. **4 poäng**
Lösning: Vi ställer först upp hypotesen

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$
$$H_0 : \mu_X \neq \mu_Y$$

Vårt observerade värde av teststatistikan ges av

$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{1/n + 1/m}}$$

där

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2} = 1.9611$$

vilket ger

$$t_{obs} = 2.1153.$$

Vi har ett två-sidigt vilket gör att vi förkastar H_0 om

$$|t_{obs}| \geq t_{\alpha/2}(n+m-2) > 2.7.$$

Vi observerar att $t_{obs} < t_{\alpha/2}(n+m-2)$ och vi förkastar därmed ej H_0.