Förel 5. 3.8, 4.3, 5.1–5.3 (Sammanfattning)

- Poisson fördelning
- Poisson processen
- Flerdimensionella fördelningar

Def: En diskret s.v. X är ~~Po~~ Poisson-fördelad om

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Skrivs $X \sim Po(\lambda)$.

Sats: Om $X \sim Po(\lambda)$ så gäller

i) $m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$

ii) $\mathbb{E}[X] = \lambda$.

iii) $Var(X) = \lambda$.

Poisson fördelningen är direkt kopplad till Poisson processen (läs framåt)

Def: En Poisson process, ~~$\{N(t)\}_{t}$~~ $N(t)$, $t \geq 0$ är en slumpmässig process som utvecklas i tiden och kvantiserar av

i) $\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

Dvs

Antalet observerade händelser till tiden t är Poisson fördelat med parameter λt.

Obs Kontinuerlig: tid, diskret antal utfall.

Röhre Ex:

Antalet bilar som korsar en bro kan antas följa en Poisson process med intensitet $\lambda = 10$ bil/min.

i) Hur många bilar förväntas passera under en timme?

ii) Vad är sannolikheten att det ~~passerar~~ inte passerar någon bil under de första 10 minuterna?

Lösn:

Låt $N(t)$ vara Poisson processen. Vet att $N(t) \sim Po(\lambda t)$

i) Vi söker $\mathbb{E}[N(60)] = // N(60) \sim Po(60 \cdot 10) // = 600$ bilar

{Inte passerar någon bil under de första 10 min} = $\{N(10) = 0\}$

ii) $\mathbb{P}(N(10) = 0) = e^{-10 \cdot 10} = e^{-100}$

Tiden till första händelse

Sats

Låt $N(t), t \geq 0$ vara en Poisson process med parameter $\lambda > 0$. Låt T vara tiden till första händelse.

Då är $T \sim Exp(\lambda)$.

Bevis:

Observera att om $\{N(t) = 0\} \Leftrightarrow \{T > t\}$

Eftersom om $N(t) = 0 \Rightarrow T > t$ & omvänt

$\Rightarrow P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} = P(T > t) \Rightarrow P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $\boxtimes$

Räkne ex: (forts)

iii) Vad är sannolikheten att vi måste vänta 1 min ~~[illegible]~~ tills att första bilen passerar?

Låt T vara tiden tills första händelse.

Då gäller

$$P(T>t) = P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}$$

med $\lambda = 10$ bil/min, $t=1$ fås

$$P(T>1) = e^{-10}$$

Anm: I ord så kan Poisson processen karaktäriseras av följande egenskaper.

i) Givet att en händelse har inträffat så är kommande händelser oberoende av när eller att den inträffat.

ii) Det förväntade antalet händelser är proportionerligt mot tidsintervallet vi observerar under.

iii) Två händelser kan inte ske samtidigt.

Flerdimensionella fördelningar: 5.1 - 5.3

Motiverande exempel:

Låt X & Y vara två ~~stn~~ diskreta s.v (ej oberoende) med följande fördelning:

$$P(X=0) = \alpha \quad , \quad P(Y=0) = \beta \qquad \text{för något } \alpha, \beta \in (0,1).$$
$$P(X=1) = 1-\alpha \quad P(Y=1) = 1-\beta$$

Vad är sannolikheten

$$P(X+Y=0) = ?$$

Vi kan reducera problemet till att förstå händelsen

$$\{X=0\} \cap \{Y=0\}$$

Detta ses eftersom X & Y endast ta värden i $\{0,1\}$ & $X+Y=0$ o.m.m. $X=Y=0$.

Om X & Y inte är oberoende så kan vi inte beräkna

$$P(X+Y=0) = P(X=0, Y=0)$$

med ovanstående information utan vi måste beskriva interaktionen mellan X & Y.

Def: Låt X, Y vara s.v.
Vektorn (X, Y) kallas för en stokastisk vektor
(förkortas ~~[illegible]~~ s.vek.)

Ex: Låt X vara vikten av en ~~[illegible]~~ slumpmässig-
person $\&$ Y vara längden.
(X, Y) är då en stokastisk vektor.

Def Fördelningsfunktion.
Låt (X, Y) vara en s.vek (kont. eller diskret.)
Fördelningsfunktionen för (X, Y) definieras

$$F(x,y) = \mathbb{P}(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}) \overset{\text{skrivs}}{=} \mathbb{P}(X \le x, Y \le y)$$

Def (Täthet)
Om (X, Y) är en s.vek. så ges
tätheten av

(diskret s.vek) $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$

(kontinuerlig s.vek) $f(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$

Sats Ett nödvändigt $\&$ tillräckligt villkor för att
en funktion $f(x,y)$ skall vara en tätheter är:

(diskret): i) $f(x,y) \ge 0$, $\forall x,y$
ii) $\sum_{x,y} f(x,y) = 1$

(kontinuerlig) i) $f(x,y) \ge 0$, $\forall x,y$
ii) $\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$

Ex: (Tillbaka till det motiverande exemplet).

Antag att X o Y definieras av

$$P(X=0, Y=1) = 1/3$$
$$P(X=1, Y=0) = 1/3$$
$$P(X=0, Y=0) = 1/6$$
$$P(X=1, Y=1) = 1/6$$

Då ser vi att sannolikheten vi söker ges av:

$$P(X+Y=0) = P(X=0, Y=0) = 1/6.$$

Kan vi säga något om X enbart?

Def Marginaltätheter

Låt (X,Y) vara en sv med tätheten $f_{X,Y}(x,y)$.

Marginaltätheten för X resp Y ges av:

(diskret)
$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$$
$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

(kontinuerlig)
$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy$$
$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dx.$$

Ex, forts

X marginal täthet fås av

$$f_X(x) = f_{X,Y}(x,0) + f_{X,Y}(x,1) \; (= P(X=x))$$

$$f_X(0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$f_X(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Så X ser ut som ett "rättvist" mynt när vi tittar på det separat

Väntevärde / Korrelation / Covarians

Def: Låt (X, Y) vara en s.vek. med täthet $f_{X,Y}(x,y)$.
Låt $H(x,y)$ vara en funktion.

(diskret) Om $\sum_{x,y} |H(x,y)| f_{X,Y}(x,y) < \infty$ så definieras väntevärdet av $H(X,Y)$

$$E[H(X,Y)] = \sum_{x,y} H(x,y) f_{X,Y}(x,y)$$

(kontinuerlig) Om

$$\iint |H(x,y)| f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy < \infty$$

så definieras väntevärdet av $H(X,Y)$

$$E[H(X,Y)] = \iint H(x,y) f(x,y)\,dx\,dy.$$

Vidare så definieras kovariansen av

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right]$$

och korrelationen

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \Big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$$

Anm: X, Y är oberoende om

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Vidare så gäller att om X och Y är oberoende så är $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

Dock så gäller inte att

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow X, Y \text{ oberoende}$$