Tentamensskrivning för kursen MARKOVTEORI
måndagen den 15/1 2007 kl. 08.30-13.30 i V-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller hem 242118.
Lärare till förfogande i skrivsalen c:a 10.00 och 11.45.
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator, och formelblad (utdelas).

****

Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

1. Tre svarta och tre vita bollar är fördelade i två urnor, I och II, alltid med tre i varje. Vi gör successiva dragningar enligt följande: en boll tas ur urna I och en ur II, och de byter urna. Låt X_n = antalet svarta bollar i urna I efter n sådana dragningar. Bestäm övergångsmatrisen för Markovkedjan $(X_n)_0^\infty$, och dess stationära fördelning.

2. Impulserna i ett system ges av en Poissonprocess med intensitet λ. Låt $0 < T_1 < T_2 < T_3 \ldots$ vara tidpunkterna för impulserna. Bestäm täthetsfunktionen för T_2.

3. Formulera och bevisa Kolmogorovs framåtekvation för en Markovkedja $(X_t)_0^\infty$ i kontinuerlig tid med ändligt utfallsrum.

4. En kortlek innehåller N stycken kort, märkta $1, 2, \ldots, N$. Den "blandas" på följande sätt: ett kort väljs på måfå (sannolikheten = $1/N$ för varje kort, alltså), och läggs överst. Låt X_n = läget för kort nr 1 efter n sådana platsbyten; med "läget" avses var i leken kortet befinner sig, räknat uppifrån. Ange övergångsmatrisen för Markovkedjan $(X_n)_0^\infty$. Bestäm den stationära fördelningen; det finns en naturlig kandidat för denna, det räcker med att bekräfta att den är den rätta.

5. Vi betraktar ett $M/M/c$-system som inte har någon kö: en anländande kund som finner att alla de c betjäningsstationerna upptagna går förlorad (därav namnet "förlustsystem"). Bestäm sannolikheten att detta händer under stationära förhållanden, d.v.s. bestäm π_c i den stationära fördelningen $(\pi_j)_0^c$.

6. Låt $p_{ij}^{(n)}$, $i, j \in E$ beteckna övergångssannolikheterna i n steg för en Markovkedja med ändligt tillståndsrum E. Antag att det finns tal $\alpha_j, j \in E$, sådana att $p_{ij}^{(n)} \to \alpha_j$ då $n \to \infty$, för alla $i, j \in E$. Visa att $(\alpha_j)_{j \in E}$ är en stationär fördelning till Markovkedjan.

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till MARKOVTEORI måndagen den 15/1 2007.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Vi får med lite eftertanke att
   $p_{01} = 1$
   $p_{10} = 1/9, p_{11} = 4/9, p_{12} = 4/9$
   $p_{21} = 4/9, p_{22} = 4/9, p_{23} = 1/9$
   $p_{32} = 1.$

   Ekvationen $\pi = \pi P$ ger att den stationära fördelningen $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_3)$ är $(1/20, 9/20, 9/20, 1/20)$.

2. Se kompendiet, Sats 6.4.

3. Se kompendiet, sid. 53-54.

4. Vi får att för
   $i = 1, 2, \ldots, N$ gäller $p_{i1} = 1/N$,
   $i = 1, 2, \ldots, (N-1)$ gäller $p_{i,i+1} = (N-i)/N$,
   $i = 2, 3, \ldots, N$ gäller $p_{ii} = (i-1)/N$.

   Den likformiga fördelningen $(1/N, \ldots, 1/N)$ löser ekvationen $\pi = \pi P$; det fås med direkt prövning.

5. Se kompendiet, avsnitt 7.3.4.

6. Vi skall visa att $\alpha = \alpha P$, där $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$; N är antalet element i E. Chapman-Kolmogorov ger, för alla par i, j, att $p_{ij}^{(n+1)} = \sum_1^N p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}$. Låt $n \to \infty$; det gör med förutsättningen i uppgiften att för alla j har vi $\alpha_j = \sum_1^N \alpha_k \cdot p_{kj}$, och vi är klara.

Tentamensskrivning för kursen MARKOVTEORI
fredagen den 30/5 2008 kl. 08.30-13.30 i M-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller mobil 0705-987486.
Lärare till förfogande i skrivsalen c:a 10.00 och 11.45.
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator, och formelblad (utdelas).

****

Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

1. En partikel gör en slumpvandring mellan hörnen på en regelbunden femhörning: den går alltid till ett av de två närmsta, med sannolikheten 1/2 för vardera möjligheten. Vi numrerar hörnen med 1, 2, 3, 4 och 5 medsols. Antag partikeln befinner sig i hörn 1 vid tidpunkten 0. Bestäm sannolikheten att den återvänder dit utan att ha träffat hörn 4.

2. Till vardera ingången till en biltunnel som är 1 km lång anländer bilar enligt två oberoende Poissonprocesser med lika stora intensiteter: 1 bil/minut. Bilarna kör alla med hastigheten 60 km/tim. Bestäm sannolikheten att det vid en viss tidpunkt finns högst 3 bilar i tunneln.

3. Vi betraktar en slumpvandring på mängden $\{0, 1, 2, \ldots\}$, i den tas ett steg till höger med sannolikheten $p, 0 < p < 1$, och ett till vänster med sannolikheten $q = 1 - p$, med undantag för tillståndet 0: där stannar den i stället med sannolikheten q. För vilka p finns en stationär fördelning, och hur ser den ut? Är denna Markovkedja ergodisk för dessa p?

4. Vi studerar ett M/M/1-kösystem, dock med avvikelsen från standardmodellen i att vi har köaversion: en kund som anländer till systemet med n kunder ansluter sig med sannolikheten $p_n > 0$, där $p_n \to 0$ då $n \to \infty$. Visa att det alltid existerar en stationär fördelning för födelse- och dödsprocessen $X_t, t \geq 0$, där X_t är antalet kunder i systemet vid tiden $t \geq 0$.

   Ej aktuell

5. Redogör för hur man med kopplingmetoden kan bevisa ergodicitet för en Markovkedja som är irreducibel, aperiodisk, och med ändligt tillståndsrum.

6. Vi analyserar en on-off-process, d.v.s. en Markovprocess med tillståndsrummet $\{0, 1\}$. Låt denna ha övergångsintensiteter $q_{01} = \lambda_0, q_{10} = \lambda_1$. Använd Kolmogorovs framåtekvation för att exakt bestämma $p_{00}(t), t \geq 0$, i termer av λ_0 och λ_1.

   Ej aktuell

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till MARKOVTEORI fredagen den 30/5 2008.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. För $i = 1, 2, 3, 4, 5$, låt $T_i = min\{n \geq 1; X_n = i\}$ där X_n är partikelns läge efter n steg. Låt $a_j = P(T_1 < T_4 | X_0 = j)$; vi söker a_1. Den vanliga metoden med betingning m.a.p. X_1 ger ekvationerna $a_1 = (1/2) \cdot (a_2 + a_5)$, $a_2 = 1/2 + (1/2) \cdot a_3, a_3 = (1/2) \cdot a_2, a_5 = 1/2$. Vi får lätt att $a_1 = \mathbf{7/12}$.

2. Antalet bilar i tunneln vid en viss tidpunkt är summan av två oberoende Poissonfördelade variabler med parameter 1, eftersom bilarna kör med hastigheten 1 km/min. Denna summa är Poissonfördelad med parameter 2, så den sökta sannolikheten är $\sum_0^3 e^{-2} \cdot 2^i/i! = \mathbf{0.86}$.

3. Se Exempel 5.5, sid. 41-43, i kompendiet.

4. Låt λ och μ vara intensiterna för ankomster och betjäningar, respektive. I vårt modifierade $M/M/1$-system får vi födelseintensiter $\lambda_n = np_n$ för $n \geq 0$. Dödsintensiteterna är alla $= \mu$. Vi vet att om $\sum_0^\infty \lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}/\mu_1 \cdots \mu_n < \infty$, så har vi en stationär fördelning. För att visa denna konvergens, tag n_0 så stort att $\lambda_n = \lambda p_n/\mu \leq \frac{1}{2}$ för $n \geq n_0$. Det är nu lätt att dominera $\sum_{n_0}^\infty \lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}/\mu^n$ med (en konstant) $\cdot \sum_0^\infty (\frac{1}{2})^n$, därmed är vi klara.

5. Se sid. 34-36 i kompendiet.

6. Kolmogorovs framåtekvation ger: $p'_{00}(t) = -\lambda_0 p_{00}(t) + \lambda_1 p_{01}(t)$ $= -p_{00}(t)(\lambda_0 + \lambda_1) + \lambda_1$. Förkorta $p_{00}(t)$ till $f(t)$ och $\lambda_1 + \lambda_0$ till α, för enkelhetens skull. Vi har alltså differentialekvationen $f'(t) = -\alpha f(t) + \lambda_1$, vilket ger $(f(t)e^{\alpha t})' = \lambda_1 e^{\alpha t}$, som i sin tur ger (obs: $f(0) = 1$) $f(t)e^{\alpha t} - 1 = (\lambda_1/\alpha)(e^{\alpha t} - 1)$. Vi kan konkludera:
$p_{00}(t) = \lambda_1/(\lambda_0 + \lambda_1) + (\lambda_0/(\lambda_0 + \lambda_1))e^{-(\lambda_0+\lambda_1)t}$.

Tentamensskrivning för kursen MARKOVTEORI
måndagen den 25/8 2008 kl. 08.30-13.30 i V-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller mobil 0705-987486.
Lärare till hands i skrivningssalen omkring 10.00 och 11.45.
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator, lexikon, och formelblad (utdelas).

****

Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

1. Formulera och bevisa Chapman-Kolmogorovs ekvation för Markovkedjor i diskret tid.

2. En partikel gör en slumpvandring mellan hörnen på en kvadrat: den tar ett steg medsols med sannolikheten $2/3$ och ett motsols med sannolikheten $1/3$. Beräkna väntevärdet för antalet steg som tas innan partikeln kommer tillbaka till det hörn den startade ifrån.

3. I två kärl som står i förbindelse med varandra finns totalt N stycken gasmolekyler. Varje molekyl stannar i ett kärl för en tid som är $Exp(1)$-fördelad, därefter flyttar den till det andra. Molekylernas rörelser är oberoende av varandra. Låt X_t vara antalet molekyler i det ena kärlet vid tidpunkten $t \geq 0$. Bestäm den stationära fördelningen för födelse- och dödsprocessen $(X_t)_0^\infty$.

4. Vi betraktar ett $M/M/1$-kösystem, med ankomstintensitet λ och betjäningstider som är exponentialfördelade med intensitet 0.5; vi använder minuter för tidsskalan. Vi är angelägna att hålla nere kölängden, och önskar att den förväntade tiden i kön för en kund inte skall överstiga 0.3, under stationära förhållanden. Vilket är det högsta värde på λ som är förenligt med detta krav?

5. Vi betraktar en irreducibel och stationär Markovkedja med tillståndsrum $E = \{0, 1, \ldots\}$. Beteckna den stationära fördelningen med $(\pi_i)_0^\infty$. Visa att $\pi_i > 0$ för alla $i \in E$.

6. De stokastiska variablerna $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende och $Exp(\lambda)$-fördelade. Bestäm $E[max(X_1, \ldots, X_n)]$.

Ej aktuell

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till MARKOVTEORI måndagen den 25/8 2008.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Se Sats 3.1 i kompendiet.

2. Numrera kvadratens hörn medsols med 1, 2, 3 och 4. Vi använder idén i Sats 3.4 i kompendiet, men låter $t_i, i = 2, 3, 4$, vara väntevärdet för antalet steg från hörn i till hörn 1, där vi antar partikeln startat. Vi får evationssystemet $t_2 = 1 + (2/3) \cdot t_3, t_3 = 1 + (1/3) \cdot t_2 + (2/3) \cdot t_4$, och $t_4 = 1 + (1/3) \cdot t_3$. Detta löses lätt: $t_2 = 17/5, t_3 = 18/5, t_4 = 11/5$, och vi får att det sökta väntevärdet $= 1 + (2/3) \cdot t_2 + (1/3) \cdot t_4 = \mathbf{4}$.

3. Med sedvanliga beteckningar för födelse- och dödsintensiteter får vi: $\lambda_n = (N-n)$, $\mu_n = n$ för $0 \le n \le N$. Låt $(\pi_n)_0^N$ vara den stationära fördelningen. Standardformeln ger: $\pi_n = (N \cdot (N-1) \cdots (N-n+1)/1 \cdot 2 \cdots n) \cdot \pi_0 = \binom{N}{n} \cdot \pi_0$. Detta ger nu lätt att $(\pi_n)_0^N$ är $Bin(N, 1/2)$-fördelningen.

4. Detta är Problem 61 i kompendiet.

5. Antag att det för tillståndet j gäller att $\pi_j = 0$. Tag ett tillstånd i sådant att $\pi_i > 0$; ett sådant måste finnas eftersom $\sum \pi_k = 1$. Eftersom kedjan är irreducibel finns ett n sådant att $p_{ij}^{(n)} > 0$. Vi får, eftersom $\pi = \pi P^n$, att $0 = \pi_j = \sum \pi_k \cdot p_{kj}^{(n)} \ge \pi_i \cdot p_{ij}^{(n)} > 0$. En motsägelse, och vi är klara.

6. Låt variablerna i storleksordning betecknas med $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$, och låt $X_{(0)} = 0$. Med användning av Exp-fördelningens glömskeegenskap, och att minimum av oberoende Exp-fördelade variabler är Exp-fördelad med intensitet $=$ summan av de ingående variablernas intensiteter, får vi att $X_{(i)} - X_{(i-1)}$ är $Exp(\lambda(n-i+1))$-fördelad för $i = 1, \ldots, n$. Detta ger att det sökta väntevärdet är $= (1/n + 1/(n-1) + \ldots + 1/2 + 1)/\lambda$.
Man kan även få fram detta via fördelningsfunktionen för maxvärdet, men det blir tyngre.

Tentamensskrivning för kursen MARKOVTEORI
fredagen den 29/5 2009 kl. 08.30-13.30 i V-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller mobil 0705-987486.
Lärare till hands i skrivningssalen omkring 10.00 och 11.45.
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator, lexikon, och formelblad (utdelas).

****
Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

1. Formulera och bevisa Chapman-Kolmogorovs ekvation för Markovkedjor i diskret tid.

2. En partikel rör sig mellan de tre hörnen i en triangel enligt en Markovkedja i kontinuerlig tid; vi numrerar hörnen med 1, 2 och 3. Alla de sex möjliga övergångsintensiteterna är lika: $q_{12} = q_{13} = \ldots = \lambda > 0$. Beteckna partikelns läge vid tidpunkten t med X_t. Antag $X_0 = 1$. Bestäm $E[T]$, där T är tiden för första träff av tillstånd 3 (alltså: $T = \min\{s; X_s = 3\}$).

3. Till ett stationärt $M/M/1$-system kommer kunder med intensitet λ, och betjäningsintensiteten är 0.5 (vi mäter i minuter). Vilket är det största värde på λ för vilket den förväntade tiden i systemet för en kund inte överskrider 5 minuter?

4. En partikel gör en slumpvandring i diskret tid mellan hörnen i en femhörning: den tar ett steg medsols med sannolikheten $p, 0 < p < 1$, och ett motsols med sannolikheten $1 - p$. Numrera hörnen med 1, 2, 3, 4 och 5 medsols, och låt X_n beteckna partikelns läge efter n steg.
Bestäm $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2, X_{n+1} = 3, X_{n+2} = 4)$; det kvittar var vi startar.

5. Ett referensbibliotek består av N böcker, märkta $1, 2, \ldots, N$, och de står på en hylla med platser märkta $1, 2, \ldots, N$ från vänster till höger. Biblioteket används enligt följande: bok nummer j efterfrågas med sannolikheten $p_j > 0$, och valen av böcker är oberoende av varandra. En bok som efterfrågas tas ned från hyllan, läses, och ställs tillbaka på plats 1. Låt $X_n =$ konfigurationen av böcker på hyllan efter n användningar av biblioteket. Ange allt du kommer på rörande Markovkedjan $(X_n)_0^\infty$! Börja lämpligen med att finna rätt tillståndsrum. Ekvationen för stationär fördelning blir ganska komplicerad, den behöver inte lösas.

Ej aktuell 6. Härled Erlangs förlustformel för ett $M/M/c$-system utan kö.

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till MARKOVTEORI måndagen den 29/5 2009.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Se kompendiet, Sats 3.1.

2. Se kompendiet, Sats 6.5. Vi gör tillstånd 3 absorberande, och får $t_1 = 1/(2\lambda) + (1/2)t_2$. P.g.a. symmetri har vi $t_1 = t_2$, så $\mathbf{t_1 = 1}/\lambda$.

3. Se kompendiet, Sats 7.5. Vi använder formeln $\omega = 1/(\mu(1-\rho))$, och ser att det sista uttrycket $= 1/(\mu - \lambda)$. Med $\mu = 1/2$ blir detta $2/(1-2\lambda)$, och om detta skall var ≤ 5 så måste vi ha $\lambda \leq 0.3$. Det största möjliga värdet på λ är alltså **0.3**.

4. Vi ser att $(X_n)_0^\infty$ är ergodisk (ty: ändligt tillståndsrum, aperiodisk och irreducibel). Den stationära fördelningen är den likformiga på de fem tillstånden. Vi har $P(X_n = 2, X_{n+1} = 3, X_{n+2} = 4)$
$= P(X_{n+1} = 3, X_{n+2} = 4 | X_n = 2) = p^2 \cdot P(X_n = 2)$, och detta konvergerar mot $(1/5) \cdot p^2$ när $n \to \infty$.

5. Som tillståndsrum E tar vi mängden av permutationer $i = (i_1, i_2, \ldots, i_N)$ av $1, 2, 3, \ldots, N$. Kedjan har övergångssannolikheter $p(i,j)$ för $i = (i_1, \ldots, i_N)$ och $j = (j_1, \ldots, j_N)$ enligt följande:
$p(i,i) = p_{i_1}$
$p(i,j) = p_{i_2}$ för $j = (i_2, i_1, i_3, \ldots, i_N)$
$p(i,j) = p_{i_3}$ för $j = (i_3, i_1, i_2, i_4, \ldots, i_N)$
o.s.v. till
$p(i,j) = p_{i_N}$ för $j = (i_N, i_1, \ldots, i_{N-1})$.

   Kedjan är aperiodisk och irreducibel, och eftersom E är ändligt så är den därmed ergodisk. Ekvationen $\pi = \pi P$ för den stationära fördelningen är inte omöjlig att bemästra, ty alla $p(i,j)$ i ekvationen $\pi_i = \sum \pi_j \cdot p(j,i)$ är lika för ett $i = (i_1, \ldots, i_N)$, nämligen $= p_{i_1}$. Men att lösa ut π explicit tar lite för lång tid för detta tillfälle.

6. Se kompendiet, sid. 94.