Tentamensskrivning för kursen MSG300/TMS110 Markovteori.
Fredagen 28 maj 2010 i V-huset.
Lärare: Tommy Norberg, ankn 3528, mob 0730 794209.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa och bifogat formelblad.

****

Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng. För GU-elever är betygsgränserna 14 resp 22 poäng, och för Chalmers-elever är gränserna 14, 19 resp 24 poäng.

1. Låt T_1, T_2 vara exponentialfördelade med intensiteter λ_1, λ_2 och oberoende. Sätt $T = \min_i T_i$.
   (a) Visa att T är exponentialfördelad.
   (b) Bestäm $P(T_1 < T_2)$.

2. För en tidshomogen Markov-kedja i diskret tid, visa att n:te ordningens övergångssannolikhet $p_{ij}^{(n)}$ är lika med elementet på rad i, kolumn j i den n:te potensen av transitionsmatrisen $\boldsymbol{P}$ (d.v.s element ij i $\boldsymbol{P}^n$).

3. Betrakta Markov-kedjan med transitionsmatris

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.4 & 0.0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

   Tillstånden benämns a, b, c, d, e. Kedjan startar i tillstånd e. Bestäm gränsvärdet då antalet steg går mot oändligheten av sannolikheten att kedjan är i tillståndet d.

4. Betrakta Markovkedjan med intensitetsmatris

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -0.005 & 0.002 & 0.003 \\ 0.001 & -0.002 & 0.001 \\ 0.004 & 0.000 & -0.004 \end{bmatrix}$$

   Tillstånden kallas $1, 2, 3$. Visa att kedjan är ergodisk och bestäm dess gränsfördelning.

5. Betrakta åter kedjan i ovanstående problem. Antag att den startar i tillstånd 1. Efter hur lång tid kan man förvänta sig att den kommer till tillstånd 3?

6. Formulera Littles formel och bevisa den i fallet M/M/1-kö.

För kortfattade lösningar, vänd!

1. (a) Se läroboken, beviset av sats 2.3.

   (b) T.ex $P(T_1 < T_2) = \int_0^\infty P(T_1 < T_2 | T_1 = t)\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, dt =$
   $\int_0^\infty P(t < T_2 | T_1 = t)\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, dt = \int_0^\infty P(t < T_2)\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, dt =$
   $\int_0^\infty \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

2. Att resultatet är sannt för $n = 2$ följer utav $p_{ij}^{(2)} = P(X_2 = j | X_0 = i) =$ $\sum_k P(X_1 = k | X_0 = i) P(X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i) =$ $\sum_k P(X_1 = k | X_0 = i) P(X_1 = j | X_0 = k) = \sum_k p_{ik} p_{kj}$. För allmänt n, använd induktion och räkna analogt.

3. Tillståndet b är absorberande och tillstånden a, d bildar en irreducibel sluten delmängd. Tillstånden c, e är genomgångstillstånd. Sannolikheten a_{eb} för absorbtion i b, givet start i e fås ur ekvationssystemet $a_{eb} = p_{eb} + p_{ec} a_{cb} + p_{ee} a_{eb}$, $a_{cb} = p_{cb} + p_{cc} a_{cb} + p_{ce} a_{eb}$. Lösningen är $a_{eb} = 5/13$, $a_{cb} = 1/13$. Stationär fördelning $\pi = [\pi_a \ \pi_d]$ på delklassen a, d fås genom att lösa $\pi \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \pi$. Lösningen är $\pi_a = 5/12$, $\pi_d = 7/12$. Genom att hänvisa till lämplig ergodsats kan vi nu konkludera att
   $P(X_n = d | X_0 = e) \to (1 - a_{eb}) \pi_d = 14/39 \approx 0.359$.

4. Att kedjan är ergodisk följer av att tillståndsrummet är ändligt och irreducibelt. Gränsfördelning är den stationära, som fås ur $\pi \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$. Lösningen är $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$.

5. Vi gör tillståndet 3 absorberande. Med standardbeteckningar fås $t_1 = 200 + \frac{2}{5} t_2$, $t_2 = 500 + \frac{1}{2} t_1$. Lösningen är $t_1 = 500$, $t_2 = 750$.

6. Littles formel är en del av sats 7.1. Den säger att förväntat antal i kö är lika med ankomstintensiteten gånger förväntad kötid: $l_q = \lambda w_q$. En M/M/1-kö är en födelse- och dödsprocess med konstanta födelse- och dödsintensiteter. Kalla dessa λ resp μ. Genom att införa $\rho_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$ och använda lämplig sats, konstaterar vi att stationär fördelning finns då $\lambda < \mu$ och är $\pi_i = (1 - \rho)\rho^i$ för $i = 0, 1, \ldots$, där $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (j.f.r sats 7.3). Enl sats 7.4 är $l_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ och enl sats 7.5 är $w_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$. Vi ser nu att $w_q \lambda = \frac{\rho^2}{1-\rho} = l_q$, qed.