316. $Z = X + (-Y)$

$f_X(t) = e^{-t}$ $(t>0)$ $\qquad$ $f_{-Y}(t) = e^{t}$ $(t<0)$ — då $P(-Y \le t) = P(Y \ge -t) = e^{t}$ för $t<0$.

Faltn: ta $t>0$,

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, f_{-Y}(t-s)\, ds$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s} f_{-Y}(t-s)\, ds = \int_t^{\infty} e^{-s} e^{t-s}\, ds$$

då $t-s<0 \Leftrightarrow s>t$

$$= e^{t}\int_t^{\infty} e^{-2s}\, ds = \frac{e^{-t}}{2}.$$

Om $t<0$ får vi $\frac{e^{t}}{2}$ på samma vis.

Så $f_Z(t) = \frac{1}{2}\begin{cases} e^{-t} & \text{om } t>0 \\ e^{t} & \text{om } t<0 \end{cases} = \dfrac{e^{-|t|}}{2}.$

---

317. Skriv: $f(t) = f_X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

$-1 \le Z \le +2$, så ta $t \in [-1,2]$ $\quad$ $g(t) = f_Y(t) = \begin{cases} 1/2, & -1 \le t \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

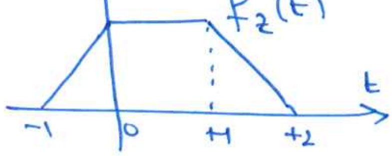
(a) $$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(t-s)\, ds$$

där $f(s)g(t-s) = \begin{cases} 1/2 & \text{om } 0 \le s \le 1 \text{ och } -1 \le t-s \le +1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Dvs $f(s)g(t-s) = 0$ om inte $\begin{cases} 0 \le s \le 1 \\ \text{och} \\ t-1 \le s \le t+1 \end{cases}$

dvs
$$f_Z(t) = \frac{1}{2}\int_{\max(0,t-1)}^{\min(1,t+1)} 1\, ds = \frac{1}{2}\left(\min(1,t+1) - \max(0,t-1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} t+1 & \text{om } -1 \le t \le 0 \\ 1 & 0 \le t \le 1 \\ 2-t & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$



(b) Samma som (a).