

1. När fel uppstår, låt A vara händelsen att felet är ett jordfel och därmed A^c att det är ett annat fel. Skriv B för händelsen att det blir strömavbrott. Så informationen vi har är: att $P(B | A) = \frac{9}{10}$, att $P(B | A^c) = \frac{6}{10}$, samt att

$$P(A) = 3P(A^c) = 3 - 3P(A), \text{ så att } P(A) = \frac{3}{4}, P(A^c) = \frac{1}{4}.$$

Vi söker $P(A | B)$ som kan skrivas som

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{4}}{P(B)}.$$

Vi har även att

$$P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | A^c)P(A^c) = \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{4} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{4}.$$

Detta ger

$$P(A | B) = \frac{9 \cdot 3}{9 \cdot 3 + 6} = \frac{9}{11} \approx 0.818.$$

2. (a) $1 = c \int_1^2 (t-1)(2-t) dt = c \int_0^1 t(1-t) dt = c [\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}]_0^1 = c/6$ så $c = 6$.
 (b) $E(X) = 1.5$ vilket man kan se pga symmetrin (eller genom integrering)
 (c)

$$E(X^3) = 6 \int_1^2 t^3(t-1)(2-t) dt = \int_1^2 (3t^4 - t^5 - 2t^3) dt = \frac{18}{5} = 3.6.$$

- (d) $F(t) = 0$ om $t < 1$ samt $= 1$ om $t > 2$, däremellan gäller

$$F(t) = 6 \int_1^t s^3(s-1)(2-s) ds = (t-1)^2(5-2t) = 5 - 12t + 9t^2 - 2t^3.$$

3. (a) Delsystem AB fungerar med sannolikhet $p^2 + 2p(1-p) = 2p - p^2$ eftersom minst en komponent ska fungera. Samma gäller för CD. Båda delsystemen måste fungera, så svaret är

$$(2p - p^2)^2 = p^2(2-p)^2 = 4p^2 + p^4 - 4p^3.$$

- (b) Nu ska B fungera samt delsystemet CD, så svaret blir $p(2p - p^2) = 2p^2 - p^3$.
 (c) (i) Nu gäller $p = e^{-2t}$ i uttrycket i (a) dvs

$$P(T > t) = e^{-8t} + 4e^{-4t} - 4e^{-6t}.$$

(ii) Uttrycket i (i) ger $1 - F(t)$ så genom att ta derivaten ser vi att täthetsfunktionen för T är $f(t) = 8e^{-8t} + 16e^{-4t} - 24e^{-6t}$ för $t > 0$. Integrering med hjälp av tipset ger

$$E(T) = \frac{1}{8} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{11}{24} \approx 0.458.$$

4. Låt X_i beteckna antal Lasse Stefanz-låtar under pass nr i .

- (a) X_i är hypergeometriskt fördelad med population $N = 100$, antal "intressanta" $m = 30$, och urval $n = 5$. Formelsamlingen ger

$$\mu = E(X_i) = (0.3) \cdot 5 = 1.5, \quad \sigma^2 = V(X_i) = 5 \cdot (0.3) \cdot (0.7) \cdot \frac{95}{99} \approx 1.00758.$$

(b) Låt \bar{X} vara medelvärdet av 20st X_i . Vi söker

$$P(\bar{X} \geq 1) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{20}} \geq -2.23\right).$$

Approximation med CGS ger svaret $\Phi(2.23) = 0.9871$.

5.

$$E(XY) = 0.2 + 0.5 = 0.7,$$

$$E(X) = 0.2 + 0.2 - 0.5 = -0.1,$$

$$E(Y) = 0.2 - 0.1 - 0.5 = -0.4,$$

$$D(X) = \sqrt{0.9 - (-0.1)^2} \approx 0.943,$$

$$D(Y) = \sqrt{0.8 - (-0.4)^2} = 0.8,$$

$$\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{0.7 - (-0.1)(-0.4)}{(0.8)(0.943)} \approx 0.875.$$

6. Här rör det sig om stickprov i par. Skillnaderna y_i blir 8, 16, -3, 5, 17 med medelvärde $\bar{y} = 8.6$ och standardavvikelse $s = 8.26$. Konfidensintervall för skillnaden ges då av

$$T = (\bar{y} \pm t_{0.025}(4) \frac{s}{\sqrt{5}}) = (8.6 \pm 2.7764 \frac{8.26}{\sqrt{5}}) = (-1.66, 18.9).$$

Då detta innehåller 0 kan vi ej dra slutsatsen att ena filmen är populärare.

7. (a) Ur tabellen får vi $\hat{p} = 12/20 = 0.6$. Det tvåsidiga intervallet blir då

$$I_p = (0.6 \pm \lambda_{0.025} \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{20}}) = (0.6 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{20}}) = (0.39, 0.81).$$

I det ensidiga intervallet sätter vi nedre gränsen till 0 eftersom en andel inte kan vara negativ. Intervallet blir

$$J_p = (0, 0.6 + \lambda_{0.05} \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{20}}) = (0, 0.6 + 1.6449 \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{20}}) = (0, 0.78).$$

(b) Längden på intervallet högst 0.3 ger kriteriet

$$2\lambda_{0.005} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.3, \quad \text{dvs } \sqrt{n} \geq \frac{2(2.5758)}{0.3} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}.$$

Men eftersom det uppenbarligen rör sig om ett annat urval så vet vi inte \hat{p} , så vi får byta ut $\hat{p}(1-\hat{p})$ mot dess maximala tänkbara värde, vilket är $\frac{1}{4}$. Detta ger

$$\sqrt{n} \geq \frac{2.5758}{0.3}, \quad \text{dvs } n \geq 74.$$

(Om man antog att $\hat{p} = 0.6$ skulle vara detsamma så skulle man få $n \geq 71$.)

8. Här är $N = 500$ och vi ska göra χ^2 -test.

(a) Medelvärdet \bar{x} räknas ut genom

$$\bar{x} = 0 \cdot \frac{38}{500} + 1 \cdot \frac{138}{500} + 2 \cdot \frac{158}{500} + 3 \cdot \frac{128}{500} + 4 \cdot \frac{31}{500} + 5 \cdot \frac{7}{500} = 1.994.$$

För $\text{Bin}(n, p)$ gäller $\mu = np$ så vi sätter $n = 5$ samt $\bar{x} = 5\hat{p}$ vilket ger $\hat{p} = 0.3988$.

(b) Vi kompletterar tabellen med förväntat antal värden i $\text{Bin}(5, \hat{p})$, dvs

$$E_i = 500 \cdot \binom{5}{i} (0.3988)^i (1 - 0.3988)^{5-i},$$

vilket ger:

$i =$	0	1	2	3	4	5
$O_i =$	38	138	158	128	31	7
$E_i =$	39.3	130.2	172.8	114.6	38.0	5.04

Testvariabeln blir

$$q_0 = \sum_{i=0}^5 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(38 - 39.3)^2}{39.3} + \dots + \frac{(7 - 5.04)^2}{5.04} \approx 5.396.$$

Antal frihetsgrader ska vara $f = k - g - 1$ där $k = 6$ är antal möjliga värden och $g = 1$ antal skattade parametrar (vi skattade \hat{p}), dvs $f = 4$. Gränsen är alltså 9.49 så vi kan ej förkasta H_0 !