1. (a) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.05$ och
   $P((A \cup B)^c) = P(A^c \cap B^c) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 0.45$
   (b) $P(A \cap B) = 0$ och $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0.1 + 0.5) = 0.4$
   (c) Vi har att
   $$P(C \mid (A \cup B)^c) = \frac{P(C \cap (A \cup B)^c)}{P((A \cup B)^c)} = \frac{P(C \cap (A \cup B)^c)}{0.4}$$
   från den föregående delen. Genom att rita ett diagram ser man att
   $$P(C \cap (A \cup B)^c) = P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) = 0.6 - 0.1 - 0.4 = 0.1.$$
   Så svaret är $P(C \mid (A \cup B)^c) = 1/4$.

2. För en exponentialfördelad slumpvariabel T med parameter λ gäller dels att väntevärdet $\mu = 1/\lambda$ och dels att $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ för alla $t > 0$. Här får vi alltså (i enheter om år) att $\lambda = \frac{1}{2}$, och därmed att kostnaden är 4000kr med sannolikhet $P(T > 5) = e^{-5/2} \approx 0.082$, alternativt 2000kr med sannolikhet $P(1 < T < 5) = e^{-1/2} - e^{-5/2} \approx 0.524$, alternativt gratis med återstående sannolikhet. Förväntad kostnad ges av summan av möjliga värden gånger dess sannolikhet, dvs
   $$\text{svar} = 0 + 2000 * (0.524) + 4000 * (0.082) = 1376\text{kr}.$$

3. Om X betecknar antal i urvalet som stöder Trump så gäller att X har fördelning $\text{Hyp}(N, n, p)$ där $N = 3 \cdot 10^6$, $n = 439$ och $p = 0.51$. Eftersom $np(1-p) > 10$ (och $\frac{N-n}{N-1}$ är nästan exakt 1) så kan vi använda normalapproximationen $X \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})$. Här är $np \approx 223.9$ och $\sqrt{np(1-p)} \approx 10.47$, vilket medför att
   $$Z = \frac{X - 223.9}{10.47} \approx N(0, 1).$$
   Vi söker
   $$P(X/n \leq 0.49) = P(X \leq 215.11) = P(Z \leq -0.84) \approx 1 - \Phi(0.84) = 1 - 0.7995 = 0.0025$$
   enligt tabellen.

4. (a) Systemet är trasigt om A är trasig *och* minst en av B, C också är trasig.
   (b) Sannolikheten att minst en av B, C är trasig är $1 - P(B, C \text{ funkar}) = 1 - p^2$. Så systemet är trasigt med sannolikhet $(1-p)(1-p^2) = 1 - p - p^2 + p^3$ och därför fungerar det med sannolikhet $p + p^2 - p^3$.
   (c) (i) 0, eftersom alla komponenter slutat fungera efter en minut.
   (ii) Varje enskild komponent fungerar med sannolikhet $p = 1 - t$, från rektangelfördelningen. Sätt in detta p i vårt tidigare uttryck: vi får sannolikheten
   $$(1-t) + (1-t)^2 - (1-t)^3 = 1 - 2t^2 + t^3.$$
   (iii) I föregående del räknade vi ut att $P(T > t) = 1 - 2t^2 + t^3$ för t mellan 0 och 1, så T har fördelningsfunktion $F(t) = 1 - P(T > t) = 2t^2 - t^3$ för dessa t. Därför blir täthetsfunktionen $f(t) = F'(t) = 4t - 3t^2$ och väntevärdet
   $$E(T) = \int_0^1 t f(t) dt = \int_0^1 t(4t - 3t^2) dt = \frac{7}{12}$$

(iv) Variansen är $V(T) = E(T^2) - E(T)^2$ och här är

$$E(T^2) = \int_0^1 t^2 f(t)dt = \int_0^1 t^2(4t - 3t^2)dt = \frac{2}{5}.$$

Så

$$V(T) = \tfrac{2}{5} - (\tfrac{7}{12})^2 = \frac{73}{720} \approx 0.0597.$$

5. (a) Vi börjar med att se vilka som är väntevärdesriktiga:

$$E(\hat{\mu}_1(X)) = 3\mu/3 = \mu, \quad E(\hat{\mu}_2(X)) = 4\mu/3 = \tfrac{4}{3}\mu, \quad E(\hat{\mu}_3(X)) = 4\mu/4 = \mu.$$

Så $\hat{\mu}_2$ är ej att föredra då den är den enda som inte är väntevärdesriktig. Vi ser vilken av de återstående som är effektivast:

$$V(\hat{\mu}_1(X)) = \tfrac{1}{9}(\sigma^2 + 4\sigma^2) = \tfrac{5}{9}\sigma^2, \quad V(\hat{\mu}_3(X)) = \tfrac{1}{16}(\sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^2) = \tfrac{3}{8}\sigma^2,$$

så $\hat{\mu}_3$ är effektivast eftersom $\frac{3}{8} < \frac{5}{9}$. Alltså är $\hat{\mu}_3$ den bästa.

(b) Alla kommer att vara normalfördelade eftersom summan av oberoende normalfördelade är normalfördelad. Vi har redan räknat ut alla parametrar förutom

$$V(\hat{\mu}_2(X)) = \tfrac{1}{9}(\sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^2) = \tfrac{2}{3}\sigma^2.$$

Så slutsatsen är att

$$\hat{\mu}_1(X) \sim N(\mu, \sigma\sqrt{5/9}), \quad \hat{\mu}_2(X) \sim N(\tfrac{4}{3}\mu, \sigma\sqrt{2/3}), \quad \hat{\mu}_3(X) \sim N(\mu, \sigma\sqrt{3/8}).$$

6. (a) Tvåsidiga konfidensintervall för σ har formen:

$$I_\sigma = \Big[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\Big],$$

och i detta fall har vi $n = 13$, $\alpha = 0.05$ och

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 = 108.7 - \tfrac{1}{13}(2.22)^2 = 108.3.$$

Tabellerna ger $\chi^2_{0.025}(12) = 23.337$ och $\chi^2_{0.975}(12) = 4.404$ så vårat intervall blir

$$I_\sigma = [\sqrt{108.3/23.337}, \sqrt{108.3/4.404}] = [2.15, 4.96].$$

(b) Testvariabelns värde blir

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{-0.171 - 1}{3/\sqrt{13}} = -1.407.$$

Eftersom testet är tvåsidigt så fås det minimala α genom att ta $\pm z$ som kritiska gränser, dvs p-värdet blir

$$p = 2(1 - \Phi(|z|)) \approx 2(1 - 0.9207) = 0.159.$$

(c) Vi skriver om testvariabeln

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$

där $\mu_0 = 1$ och $\mu = 0$ och därmed $(\mu - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) = -1.20$. Alltså är testvariabelns sanna fördelning $N(-1.2, 1)$. Styrkan $1 - \beta$ är sannolikheten att Z_0 ligger i förkastelseområdet, dvs

$$1-\beta = P(Z_0 < -1.96) + P(Z_0 > 1.96) = P(Z_0+1.2 < -0.76) + P(Z_0+1.2 > 3.16).$$

Den första termen är $\Phi(-0.76) = 1 - \Phi(0.76) = 1 - 0.7764 = 0.2236$ och den andra är så liten att vi bortser från den. Alltså är styrkan ca $= 0.2236$.

7. Vi skriver $n_1 = 9$ respektive $n_2 = 15$ för stickprovens storlekar. Den lämpliga formen för ett konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ är

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \big(-\infty, (\overline{x} - \overline{y}) + t_{0.05}(n_1 + n_2 - 2)s\sqrt{\tfrac{1}{n_1} + \tfrac{1}{n_2}}\big]$$

(man kan alternativt ta fram ett nedåt begränsat KI för $\mu_2 - \mu_1$). Här är s sammanvägningen:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

och

$$(n_1 - 1)s_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - n_1(\overline{x})^2 = 65.9 - 9 \cdot (1.72)^2 = 39.27,$$

$$(n_2 - 1)s_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2 - n_2(\overline{y})^2 = 96.0 - 15 \cdot (1.83)^2 = 45.77,$$

så att

$$s = \sqrt{(39.27 + 45.77)/22} = 1.97.$$

Tabellen ger $t_{0.05}(22) = 1.72$ och $\overline{x} - \overline{y} = -0.11$ så vi får

$$I_{\mu_1-\mu_2} = (-\infty, -0.11 + 1.72 \cdot 1.97 \cdot 0.42] = (-\infty, 1.32].$$

Eftersom $0 \in I_{\mu_1-\mu_2}$ så kan vi ej dra slutsatsen att $\mu_1 < \mu_2$.

8. Vi kompletterar tabellen med förväntat antal $E_i = 97p_i$:

i	1	2	3	4	5
O_i	3	16	46	20	12
E_i	6.79	23.28	36.86	23.28	6.79

Testvariabeln för χ^2-/goodness-of-fit-testet blir

$$q_0 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(3 - 6.79)^2}{6.79} + \frac{(16 - 23.28)^2}{23.28} + \cdots + \frac{(12 - 6.79)^2}{6.79} = 11.12.$$

Detta värde ska jämföras med $\chi^2_{0.05}(5 - 1) = 9.488$ (vi har 4 frihetsgrader då vi ej använt en skattning av någon parameter). Eftersom $11.12 > 9.488$ så är vi inom förkastelseområdet och drar slutsatsen att betygen ej följer den avsedda fördelningen.