TENTAMEN 2016-10-26 Examinator och jour:
Dataanalys och statistik TMS136 J. Björnberg (besöker ca kl 10)

Tentamen består av 8 uppgifter om totalt 50 poäng. För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 20, 30 resp. 40 poäng. Lösningarna skall vara väl motiverade.

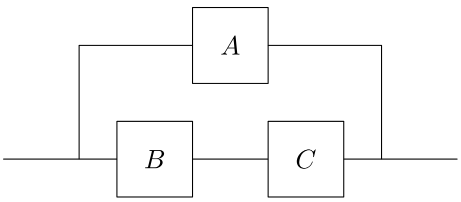
Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare, boken Matematisk statistik av Ulla Dahlblom, Tabell- och formelsamling av Håkan Blomqvist.
Boken eller formelsamlingen får inte innehålla egna anteckningar. **Lycka till!**

1. Låt A, B vara två händelser så att $P(A) = 0.1$ och $P(B) = 0.5$.
   (a) Antag att A, B är oberoende. Beräkna $P(A \cap B)$ och $P((A \cup B)^c)$. (2p)
   (b) Antag istället att A, B är disjunkta. Beräkna $P(A \cap B)$ och $P((A \cup B)^c)$. (2p)
   (c) Antag återigen att A, B är disjunkta. Om C är en händelse så att $P(C) = 0.6, P(A \cap C) = 0.1$ och $P(B \cap C) = 0.4$, vad blir $P(C|(A \cup B)^c)$? (2p)

2. Tvättmaskiner av märket *Elektrofusk* har exponentialfördelad livslängd med väntevärde 2 år. Om maskinen går sönder måste den lagas. Sker detta inom ett år så gäller garantin och den repareras gratis. Om den går sönder efter 5 år (eller senare) så kostar reparationen 4000kr. Däremellan kostar reparationen 2000kr. Ange förväntad reparationskostnad. (6p)

3. I delstaten Calisota, som är en *swing-state* med 3 miljoner invånare, stöder vid en viss tidpunkt 51% av befolkningen Trump. En väljarundersökning görs med ett slumpmässigt urval av 439 invånare. Beräkna (approximativt) sannolikheten för att högst 49% av de tillfrågade stöder Trump. (5p)

4. Systemet nedan fungerar om det finns en väg från vänster till höger genom fungerande komponenter. Komponenterna A, B, C är oberoende.



   (a) Beskriv i ord händelsen att systemet är *trasigt* i termer av vilka komponenter som är trasiga. (2p)
   (b) Om varje enskild komponent fungerar med sannolikhet p, vad är sannolikheten att systemets fungerar? (2p)
   (c) Antag att varje enskild komponent slutar fungera efter en slumpmässig tid som är rektangelfördelade på intervallet $[0, 1]$ (enhet: minuter). Vad är
      (i) sannolikheten att systemet fungerar efter 2 minuter?
      (ii) sannolikheten att systemet fungerar efter t minuter, då $0 \leq t \leq 1$?
      (iii) väntevärdet hos tiden T till systemet slutar fungera?
      (iv) variansen hos samma T? (4p)

Fortsättning på nästa sida →

5. Vi har ett oberoende stickprov x_1, x_2, x_3 från $N(\mu, \sigma)$ och låter

$$\hat{\mu}_1 = \frac{x_1 + 2x_3}{3}, \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{3} \quad \text{och} \quad \hat{\mu}_3 = \frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}$$

vara skattningar av μ.

(a) Vilken av dessa är bäst? Motivera. (3p)

(b) Ange fördelningarna hos motsvarande estimatorer (inklusive parametrar). (3p)

6. Låt $x_1, \ldots, x_{13}$ beteckna ett oberoende stickprov ur en normalfördelning $N(\mu, \sigma)$, som uppfyller:

$$\sum_{i=1}^{13} x_i = -2.22 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{13} x_i^2 = 108.7$$

(a) Beräkna ett tvåsidigt konfidensintervall för σ med konfidensgrad 95%. (2p)

(b) Antag nu istället att $\sigma = 3$ kan betraktas som känd, och att man vill testa

$$H_0 : \mu = 1 \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu \neq 1.$$

Beräkna testets p-värde (minsta signifikansnivån som vi förkastar H_0 på). (3p)

(c) Om signifikansnivån $\alpha = 0.05$, vad är testets styrka i $\mu = 0$? (2p)

7. Vi har två stickprov, $x_1, \ldots, x_9$ ur $N(\mu_1, \sigma)$ samt $y_1, \ldots, y_{15}$ ur $N(\mu_2, \sigma)$, där standardavvikelsen σ visserligen är okänd men samma för båda stickproven. Dessa uppfyller

$$\overline{x} = 1.72, \quad \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 65.9 \quad \text{samt} \quad \overline{y} = 1.83, \quad \sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 96.0$$

Avgör, genom att ta fram ett lämpligt ensidigt konfidensintervall med konfidensgrad 95%, om man bör tro att $\mu_1 < \mu_2$. (6p)

8. En gång i tiden användes en betygsskala 1, 2, 3, 4, 5 som var konstruerad så att fördelningen av betyg skulle vara 7% ettor, 24% tvåor, 38% treor, 24% fyror samt 7% femmor. Man misstänkte dock att det uppstått betygsinflation och sammanställde därför betygen från 97 elever, med resultaten

Betyg:	1	2	3	4	5
Antal:	3	16	46	20	12

Testa på signifikansnivå 95% om detta tyder på att betygen avviker från den tänkta fördelningen. (6p)