TENTAMEN 2017-10-25 Examinator:
Sannolikhetsteori och statistik TMS137 J. Björnberg

Tentamen består av 8 uppgifter om totalt 50 poäng. För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 20, 30 resp. 40 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng. Lösningarna skall vara väl motiverade.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare, boken Stokastik av Alm & Britton, Formelsamling i matematisk statistk.
Boken eller formelsamlingen får inte innehålla egna anteckningar. **Lycka till!**

1. En låda innehåller 10 röda och 10 vita bollar, huller om buller. Man plockar 5 utan återläggning. Låt A beteckna händelsen att man får bara röda bollar, och låt B beteckna händelsen att man får minst en av vardera färg. Beräkna följande sannolikheter:

$$P(A), \quad P(A \cup B), \quad P(A \mid B^c).$$

(6p)

2. En kontinuerlig slumpvariabel X har täthetsfunktion $f(t)$ där

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } -a \le t \le 0, \\ 1-t, & \text{om } 0 < t \le 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Bestäm:

(a) värdet på konstanten a, (2p)
(b) fördelningsfunktionen $F(t)$ för X, (2p)
(c) väntevärdet $E(X)$, (2p)
(d) sannolikheten $P(|X - 0.5| \le 0.6)$. (2p)

3. X_1 och X_2 är oberoende slumpvariabler med samma sannolikhetsfunktion $p(k)$ där

$$p(1) = \tfrac{1}{2}, \quad p(2) = \tfrac{1}{3}, \quad p(3) = \tfrac{1}{6} \qquad \text{(alla andra } p(k) = 0\text{).}$$

Bestäm:

(a) väntevärdet $E(X_1 - X_2)$ och variansen $V(X_1 - X_2)$ (2p)
(b) sannolikheten $P(X_1 \le X_2)$ (2p)
(c) den sannolikhetsgenererande funktionen $E(s^{X_1 - X_2})$ (2p)
(svaret ska vara av formen $\sum_k a_k s^k$ med koefficienterna a_k angivna)

[De tre delarna kan lösas oberoende av varandra.]

4. Låt $N(t)$ beteckna en Poissonprocess med intensitet 2. Beräkna sannolikheterna:

(a) $P(N(1) = 1, N(2) = 2)$, (2p)
(b) $P(N(3) \ge 3)$, (2p)
(c) $P(N(3) \ge 3 \mid N(1) = 1, N(2) = 2)$. (2p)

Fortsättning på nästa sida →

5. Ett bageri har två maskiner, en som producerar syltkakor och en som producerar kanelbullar. Både kakorna och bullarna produceras en i taget. Tiderna det tar per kaka, respektive bulle, är alla oberoende av varandra, med fördelning $\mathrm{Re}[0.3, 1.0]$ per kaka respektive $\mathrm{Re}[0.5, 1.5]$ per bulle (enhet: minuter). Bageriet har fått en stor order på 500 kakor och 300 bullar. Beräkna approximativt sannolikheten att tiderna det tar att producera alla kakorna, respektive alla bullarna, skiljer sig åt med mer än 30 min. (6p)

6. Stickproven x och y nedan är oberoende observationer av $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ respektive $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$:

$$\begin{array}{lllllll} x: & -0.49, & -0.08, & 3.29, & -1.26, & 2.50, & \\ y: & 2.43, & 0.75, & -4.52, & 3.88, & -1.30, & 6.82. \end{array}$$

   Ta fram ett lämpligt 99% konfidensintervall för skillnaden $\mu_1 - \mu_2$ och använd detta för att avgöra om vi har anledning att tro att $\mu_1 \neq \mu_2$. (6p)

7. I en liten ort i Wyoming oroar sig några av invånarna för att deras dricksvatten förstörs av fracking-verksamheten som bedrivs i närheten. De införskaffar testutrustning och mäter halten av ett visst giftämne i 6st av brunnarna i orten. Mätningarna kan anses oberoende och normalfördelade, och utrustningen har en angiven osäkerhet på $\sigma = 0.4$. Delstatens riktlinjer anger att en gifthalt som överstiger 0.1 anses som riskabel och bör rapporteras.

   Formulera ett lämpligt (ensidigt) test, med nollhypotes och mothypotes och med felrisk $\alpha = 1\%$, för att avgöra om resultatet bör rapporteras. Bestäm testets p-värde, samt testets styrka om den sanna gifthalten i grundvattnet är 0.3, baserat på mätresultaten:

$$0.614, \quad 0.228, \quad 0.742, \quad 0.653, \quad 0.352, \quad 0.673.$$

   (8p)

8. Innan starten på *The Boat Race* singlas en slant för att avgöra vem som får välja sida att starta på. Det är då mycket viktigt att slanten är symmetrisk. För att testa detta singlas slanten 136 gånger, med resultaten:

Krona (H)	Klave (T)	Totalt
57	79	136

   Genomför lämpligt hypotestest, med 5% felrisk, för att avgöra om man bör förkasta hypotesen att slanten är symmetrisk. (4p)