J. Björnberg
september 2018

Genererande funktioner används för att, på ett kompakt sätt i en enda funktion, sammanfatta all information om en slumpvariabel X. Vi tittar på två sorters genererande funktioner: sannolikhetsgenererande samt momentgenererande.

1 Sannolikhetsgenererande funktion

Denna funktion definierar vi endast för diskreta slumpvariabler med heltalsvärden ≥ 0. Dvs X tar värden i $\{0, 1, 2, \dots\}$ och har sannolikhetsfunktion $p(k) = p_X(k) = P(X = k)$. Den sannolikhetsgenererande funktionen definieras då av

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k \geq 0} p(k)s^k, \qquad s \in [0, 1].$$

För att se att $E[s^X]$ verkligen ges av summan i högerledet använder vi det allmänna uttrycket $E[g(X)] = \sum_k g(k)p(k)$ med $g(k) = s^k$.

1.1 Exempel

- Om X är tvåpunktsfördelad, dvs X tar värden 1 eller 0 med sannolikhet p respektive $1 - p$, så får vi
$$G_X(s) = (1 - p)s^0 + ps^1 = 1 - p + ps.$$
- Om X har binomialfördelning $\mathrm{Bin}(n, p)$ så gäller $p(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ för $0 \leq k \leq n$ (och $p(k) = 0$ annars). Genom användning av binomialsatsen $(x + y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ ser vi att
$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \cdot s^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (sp)^k (1 - p)^{n-k} = (1 - p + sp)^n.$$
- Om X är Poissonfördelad, $\mathrm{Po}(\lambda)$, så kan vi använda formeln $e^x = \sum_{k \geq 0} x^k/k!$ för att räkna fram:
$$G_X(s) = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot s^k = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{(s\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}.$$

Trots att den sannolikhetsgenererande funktionen $G(s)$ i slutändan bara är ett väntevärde (av s^X) så innehåller den all information om fördelningen hos slumpvariabeln X. Detta har att göra med att vi har en parameter s som vi kan manipulera. Om vi exempelvis sätter $s = 0$ så får vi $G(0) = p(0)$, sannolikheten att $X = 0$. Vi kan också ta derivator:

- Första derivatan är $G'(s) = \sum_{k \geq 0} kp(k)s^{k-1}$. Sätter vi $s = 0$ så får vi: $G'(0) = p(1)$, sannolikheten att $X = 1$. Sätter vi $s = 1$ så får vi väntevärdet: $G'(1) = \sum_{k \geq 0} kp(k) = E(X)$.
- Andra derivatan är $G''(s) = \sum_{k \geq 0} k(k - 1)p(k)s^{k-2}$. Sätter vi $s = 0$ så får vi: $G''(0) = 2p(2)$. Sätter vi $s = 1$ så får vi väntevärdet av $X(X - 1) = X^2 - X$ $G'(1) = \sum_{k \geq 0} k(k - 1)p(k) = E(X(X - 1))$.

I allmänhet gäller följande:

Sats. Sannolikhetsfunktionen $p_X(k)$ kan räknas ut från $G_X(s)$ genom formeln:

$$p_X(k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!},$$

där $G^{(k)}$ betecknar derivatan k gånger.

Innebörden av denna sats är helt enkelt att $G_X(s)$ innehåller all information om fördelningen hos X: vet man funktionen $G(s)$ så vet man även sannolikhetsfunktionen $p(k)$.

Relevansen av detta är framförallt att det kan vara lättare att räkna ut $G(s)$ än själva $p(k)$. Exempelvis har vi tidigare jobbat med faltningsformler för att ta fram fördelningen hos en summa $X + Y$ av oberoende slumpvariabler. Det kan vara besvärligt att använda faltningsformeln och det är lätt att räkna fel. Tack vare följande sats kan man, åtminstonde i princip, ibland göra det enklare för sig genom att använda den sannolikhetsgenererande funktionen:

Sats. Om X, Y är oberoende slumpvariabler, båda med värden i $\{0, 1, 2, \dots\}$, så gäller att

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s).$$

Resultatet följer från den allmänna reäkneregeln för väntevärden av produkter av oberoende slumpvariabler, om vi betraktar s^X respektive s^Y som 'egna' slumpvariabler:

$$G_{X+Y}(s) = E[s^{X+Y}] = E[s^X s^Y] = E[s^X]E[s^Y] = G_X(s)G_Y(s).$$

1.2 Exempel

Vi kan med hjälp av satsen visa att summan av oberoende Poissonfördelningar också är en Poissonfördelning: om X, Y är oberoende med fördelning $\mathrm{Po}(\mu_1)$ respektive $\mathrm{Po}(\mu_1)$ så gäller:

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{\mu_1(s-1)}e^{\mu_2(s-1)} = e^{(\mu_1+\mu_2)(s-1)}.$$

Alltså har $X + Y$ fördelning $\mathrm{Po}(\mu_1 + \mu_2)$.

2 Momentgenererande funktion

Vi nämner också en till genererande funktion, denna gång definierad för godtyckliga slumpvariabler X (som kan vara kontinuerliga, och/eller ta negativa värden osv). Den kallas för den *momentgenererande funktionen* och definieras av

$$M_X(t) = E[e^{tX}].$$

Den här funktionen har liknande egenskaper som den sannolikhetsgenererande funktionen, exempelvis gäller (med i princip samma bevis):

Sats. Om X, Y är oberoende slumpvariabler så gäller att

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t).$$

2.1 Exempel

- Om X har den likformiga fördelningen U(0,1) mellan 0 och 1 så gäller som bekant att $f(s) = 1$ för $s \in [0,1]$ och $f(s) = 0$ annars. Den momentgenererande funktionen kan räknas ut genom:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts} f(s)\, ds = \int_0^1 e^{ts}\, ds = \frac{e^t - 1}{t}.$$

- Tidigare räknade vi ut fördelningen hos $X + Y$, där X, Y är oberoende med fördelning U(0,1), genom att använda faltningsformeln. Den momentgenererande funktionen för $X + Y$ är lätt att räkna ut:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^2.$$