1.

$$P(A) = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} = \boxed{0.016}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ eftersom de är oförenliga. Vidare är $P(B) = 1 - 2P(A)$ pga symmetri. Så $P(A \cup B) = 1 - P(A) = \boxed{0.984}$.

Givet man bara får en färg så är vitt och rött lika sannolikt, så $P(A \mid B^c) = \boxed{\frac{1}{2}}$.
Alternativ lösning:

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A)}{P(B^c)} = \frac{P(A)}{2P(A)} = \tfrac{1}{2}.$$

2. (a) Eftersom $1 = \int_{-a}^{1} f(s)ds = a + \frac{1}{2}$ så är $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

(b)

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t < -a, \\ t + a, & \text{om } -a \leq t < 0, \\ a + t - \frac{t^2}{2}, & \text{om } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{om } t \geq 1. \end{cases}$$

(c)

$$E(X) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} t dt + \int_{0}^{1} t(1-t)dt = \boxed{\frac{1}{24} \approx 0.042}.$$

(d) $P(|X - 0.5| \leq 0.6) = P(-0.1 \leq X \leq 1.1) = 1 - F(-0.1) = \boxed{0.6}$.

3. (a) $\boxed{E(X_1 - X_2) = 0}$ då de har samma fördelning, $V(X_1 - X_2) = 2V(X_1)$ pga oberoende, och $V(X_1) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} - (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{6})^2 = \frac{5}{9}$ så $\boxed{V(X_1 - X_2) = \frac{10}{9} \approx 1.11}$.

(b)

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq X_2) &= p(1)^2 + p(1)p(2) + p(1)p(3) + p(2)^2 + p(2)p(3) + p(3)^2 \\ &= \boxed{\tfrac{25}{36} \approx 0.694}. \end{aligned}$$

(c) Pga oberoende gäller

$$\begin{aligned} E(s^{X_1 - X_2}) &= E(s^{X_1})E(s^{-X_2}) = \left(\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{3}s^2 + \tfrac{1}{6}s^3\right)\left(\tfrac{1}{2}s^{-1} + \tfrac{1}{3}s^{-2} + \tfrac{1}{6}s^{-3}\right) \\ &= \boxed{\tfrac{1}{12}s^{-2} + \tfrac{2}{9}s^{-1} + \tfrac{7}{18} + \tfrac{2}{9}s + \tfrac{1}{12}s^2}. \end{aligned}$$

4. (a) $P(N(1) = 1, N(2) = 2) = P(N(1) = 1, N(2) - N(1) = 1) = \boxed{(2e^{-2})^2 \approx 0.073}$.

(b) $P(N(3) \geq 3) = 1 - P(N(3) \leq 2) = 1 - e^{-6}(6^2/2 + 6/1 + 1) = \boxed{1 - 25e^{-6} \approx 0.938}$

(c)

$$\begin{aligned} P(N(3) \geq 3 \mid N(1) = 1, N(2) = 2) &= \frac{P(N(1) = 1, N(2) = 2, N(3) \geq 3)}{P(N(1) = 1, N(2) = 2)} \\ &= \frac{P(N(3) - N(2) \geq 1)P(N(1) = 1, N(2) = 2)}{P(N(1) = 1, N(2) = 2)} \\ &= \boxed{1 - e^{-2} \approx 0.865} \end{aligned}$$

5. Låt X_i resp Y_i beteckna tiden för kaka resp bulle nr i. Då gäller $E(X_i) = 0.65$ och $V(X_i) = 0.041$ samt $E(Y_i) = 1$ och $V(Y_i) = 1/12 = 0.083$. Med CGS får vi att

$$D = \sum_{i=1}^{500} X_i - \sum_{i=1}^{300} Y_i \approx N(\mu, \sigma^2),$$

där $\mu = 500(0.65) - 300 = 25$ och $\sigma = \sqrt{500(0.041) + 300(0.083)} = 6.738$.

Skriv $Z = (D - \mu)/\sigma \approx N(0, 1)$. Vi söker

$$\begin{aligned} P(|D| \geq 30) &= 1 - P(-30 \leq D \leq 30) = 1 - P\Big(\frac{-\mu - 30}{\sigma} \leq Z \leq \frac{-\mu + 30}{\sigma}\Big) \\ &= 1 - P(-8.16 \leq Z \leq 0.742) \approx \boxed{1 - \Phi(0.74) = 0.2296}. \end{aligned}$$

6. Vi ska ha ett tvåsidigt intervall. Då standardavvikelserna är samma gäller uttrycket

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = \big(\overline{x} - \overline{y} \pm t_{0.005}(5 + 6 - 2) s_p \sqrt{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}}\big).$$

Här är $\overline{x} = 0.793$, $\overline{y} = 1.343$ och $s_x^2 = 3.96$, $s_y^2 = 15.87$ så $s_p^2 = 10.58$ och därmed $s_p = 3.25$. Vi har $t_{0.005}(9) = 3.2498$. Detta ger intervallet $\boxed{I_{\mu_1 - \mu_2} = (-6.95, 5.85)}$. Då detta innehåller 0 har vi *inte* anledning att tro att $\mu_1 \neq \mu_2$.

7. *Testet:* Rapporterar om det kan visas att gifthalten äverstiger 0.1. Så H_0: $\mu \leq \mu_0 = 0.1$ och H_1: $\mu > \mu_0 = 0.1$. Här är $\sigma = 0.4$ känt, så med testvariabeln $Z_0 = (\overline{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ är den kritiska gränsen $\lambda_{0.01} = 2.33$, och vi förkastar H_0 om vårt testvärde $z > 2.33$.

   p-värdet: Då stickprovets medelvärde $\overline{x} = 0.544$ så blir testvärdet $z = (0.544 - 0.1)/(0.4/\sqrt{6}) = 2.72$. p-värdet är den signifikansnivå vi får om z sätts som gräns, dvs $\boxed{p = 1 - \Phi(z) = 1 - \Phi(2.72) = 0.0033}$.

   Styrkan: Om sanna $\mu = 0.3$ så har vår testvariabel Z_0 fördelning $N(\frac{0.3-0.1}{0.4/\sqrt{6}} = 1.22, 1)$. Styrkan är $P(Z_0 > 2.33) = 1 - \Phi(2.33 - 1.22) = \boxed{1 - \Phi(1.11) \approx 0.1335}$.

8. Denna uppgift kan lösas med antingen normalfördelningstest eller med χ^2-test. De två metoderna ger samma slutsats.

   - Vi gör χ^2-test med H_0 att fördelningen är 50% chans vardera för krona och klave. Med alla $E_i = 136/2 = 68$ får testvariabeln värdet

     $$q = \frac{(57 - 68)^2}{68} + \frac{(79 - 68)^2}{68} = 3.56.$$

     Då den kritiska gränsen $\chi^2_{0.05}(1) = 3.84 > 3.56$ så ska vi inte förkasta H_0!
   - Vi gör normalfördelningstest med testvariabeln $Z_0 = (\hat{p} - p_0)/\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}$ som är approximativt normalfördelad. H_0 är att $p = p_0 = 0.5$, H_1 att $p \neq p_0$, och $\hat{p} = 57/136$ är andelen krona i urvalet. För felrisk 5% är gränserna ± 1.96. Vårt observerade värde blir $z = -1.89$ vilket är inom acceptansområdet så detta test säger att vi ej ska förkasta H_0!