1. När fel uppstår, låt A vara händelsen att felet är ett jordfel och därmed A^c att det är ett annat fel. Skriv B för händelsen att det blir strömavbrott. Så informationen vi har är: att $P(B \mid A) = \frac{9}{10}$, att $P(B \mid A^c) = \frac{6}{10}$, samt att

$$P(A) = 3P(A^c) = 3 - 3P(A), \text{ så att } P(A) = \tfrac{3}{4}, P(A^c) = \tfrac{1}{4}.$$

Vi söker $P(A \mid B)$ som kan skrivas som

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{10}\frac{3}{4}}{P(B)}.$$

Vi har även att

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c) = \tfrac{9}{10}\tfrac{3}{4} + \tfrac{6}{10}\tfrac{1}{4}.$$

Detta ger

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{9 \cdot 3}{9 \cdot 3 + 6} = \frac{9}{11} \approx 0.818}.$$

2. (a) $1 = c\int_1^2 (t-1)(2-t)dt = c\int_0^1 t(1-t)dt = c[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}]_0^1 = c/6$ så $\boxed{c = 6}$.

(b) $\boxed{E(X) = 1.5}$ vilket man kan se pga symmetrin (eller genom integrering)

(c)

$$E(X^3) = 6\int_1^2 t^3(t-1)(2-t)dt = \int_1^2 (3t^4 - t^5 - 2t^3)dt = \boxed{\tfrac{18}{5} = 3.6}.$$

(d) $F(t) = 0$ om $t < 1$ samt $= 1$ om $t > 2$, däremellan gäller

$$F(t) = 6\int_1^t (s-1)(2-s)ds = (t-1)^2(5-2t) = 5 - 12t + 9t^2 - 2t^3.$$

3. (a) Delsystem AB fungerar med sannolikhet $p^2 + 2p(1-p) = 2p - p^2$ eftersom minst en komponent ska fungera. Samma gäller för CD. Båda delsystemen måste fungera, så svaret är

$$\boxed{(2p - p^2)^2 = p^2(2-p)^2 = 4p^2 + p^4 - 4p^3}.$$

(b) Nu ska B fungera samt delsystemet CD, så svaret blir $\boxed{p(2p - p^2) = 2p^2 - p^3}$.

(c) (i) Nu gäller $p = e^{-2t}$ i uttrycket i (a) dvs

$$\boxed{P(T > t) = e^{-8t} + 4e^{-4t} - 4e^{-6t}}.$$

(ii) Uttrycket i (i) ger $1 - F(t)$ så genom att ta derivaten ser vi att täthetsfunktionen för T är $f(t) = 8e^{-8t} + 16e^{-4t} - 24e^{6t}$ för $t > 0$. Integrering med hjälp av tipset ger

$$\boxed{E(T) = \tfrac{1}{8} + 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{11}{24} \approx 0.458}.$$

4. Låt X_i beteckna antal Lasse Stefanz-låtar under pass nr i.

(a) X_i är hypergeometriskt fördelad med population $N = 100$, antal ”intressanta” $m = 30$, och urval $n = 5$. Formelsamlingen ger

$$\boxed{\mu = E(X_i) = (0.3) \cdot 5 = 1.5, \qquad \sigma^2 = V(X_i) = 5 \cdot (0.3) \cdot (0.7) \cdot \frac{95}{99} \approx 1.00758}.$$

(b) Låt $\overline{X}$ vara medelvärdet av 20st X_i. Vi söker

$$P(\overline{X} \geq 1) = P\Big(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{20}} \geq -2.23\Big).$$

Approximation med CGS ger svaret $\boxed{\Phi(2.23) = 0.9871}$.

5.

$$\begin{aligned}
&E(XY) = 0.2 + 0.5 = 0.7,\\
&E(X) = 0.2 + 0.2 - 0.5 = -0.1,\\
&E(Y) = 0.2 - 0.1 - 0.5 = -0.4,\\
&D(X) = \sqrt{0.9 - (-0.1)^2} \approx 0.943,\\
&D(Y) = \sqrt{0.8 - (-0.4)^2} = 0.8,\\
&\rho(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{0.7 - (-0.1)(-0.4)}{(0.8)(0.943)} \approx 0.875.
\end{aligned}$$

6. Här rör det sig om stickprov i par. Skillnaderna y_i blir $8, 16, -3, 5, 17$ med medelvärde $\overline{y} = 8.6$ och standardavvikelse $s = 8.26$. Konfidensintervall för skillnaden ges då av

$$T = \big(\overline{y} \pm t_{0.025}(4)\tfrac{s}{\sqrt{5}}\big) = \big(8.6 \pm 2.7764\tfrac{8.26}{\sqrt{5}}\big) = \big(-1.66, 18.9\big).$$

Då detta innehåller 0 kan vi ej dra slutsatsen att ena filmen är populärare.

7. (a) Ur tabellen får vi $\hat{p} = 12/20 = 0.6$. Det tvåsidiga intervallet blir då

$$\boxed{I_p = \big(0.6 \pm \lambda_{0.025}\sqrt{\tfrac{0.6\cdot 0.4}{20}}\big) = \big(0.6 \pm 1.96\sqrt{\tfrac{0.6\cdot 0.4}{20}}\big) = (0.39, 0.81).}$$

I det ensidiga intervallet sätter vi nedre gränsen till 0 eftersom en andel inte kan vara negativ. Intervallet blir

$$\boxed{J_p = \big(0, 0.6 + \lambda_{0.05}\sqrt{\tfrac{0.6\cdot 0.4}{20}}\big) = \big(0, 0.6 + 1.6449\sqrt{\tfrac{0.6\cdot 0.4}{20}}\big) = (0, 0.78).}$$

(b) Längden på intervallet högst 0.3 ger kriteriet

$$2\lambda_{0.005}\sqrt{\tfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.3, \quad \text{dvs } \sqrt{n} \geq \tfrac{2(2.5758)}{0.3}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}.$$

Men eftersom det uppenbarligen rör sig om ett annat urval så vet vi inte $\hat{p}$, så vi får byta ut $\hat{p}(1-\hat{p})$ mot dess maximala tänkbara värde, vilket är $\frac{1}{4}$. Detta ger

$$\boxed{\sqrt{n} \geq \tfrac{2.5758}{0.3}, \qquad \text{dvs } n \geq 74.}$$

(Om man antog att $\hat{p} = 0.6$ skulle vara detsamma så skulle man få $n \geq 71$.)

8. Här är $N = 500$ och vi ska göra χ^2-test.

(a) Medelvärdet $\overline{x}$ räknas ut genom

$$\overline{x} = 0 \cdot \tfrac{38}{500} + 1 \cdot \tfrac{138}{500} + 2 \cdot \tfrac{158}{500} + 3 \cdot \tfrac{128}{500} + 4 \cdot \tfrac{31}{500} + 5 \cdot \tfrac{7}{500} = 1.994.$$

För $\mathrm{Bin}(n,p)$ gäller $\mu = np$ så vi sätter $n = 5$ samt $\overline{x} = 5\hat{p}$ vilket ger $\boxed{\hat{p} = 0.3988}$.

(b) Vi kompletterar tabellen med förväntat antal värden i $\mathrm{Bin}(5, \hat{p})$, dvs

$$E_i = 500 \cdot \binom{5}{i} (0.3988)^i (1 - 0.3988)^{5-i},$$

vilket ger:

$i =$	0	1	2	3	4	5
$O_i =$	38	138	158	128	31	7
$E_i =$	39.3	130.2	172.8	114.6	38.0	5.04

Testvariabeln blir

$$q_0 = \sum_{i=0}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(38-39.3)^2}{39.3} + \cdots + \frac{(7-5.04)^2}{5.04} \approx 5.396.$$

Antal frihetsgrader ska vara $f = k - g - 1$ där $k = 6$ är antal möjliga värden och $g = 1$ antal skattade parametrar (vi skattade $\hat{p}$), dvs $f = 4$. Gränsen är alltså 9.49 så vi kan ej förkasta H_0!