1. Herrarna får heta 1, 2, 3 och deras hattar numreras motsvarande. Det finns 6 möjliga sätt att para hattarna med herrarna:

$$123, \quad 132, \quad 213, \quad 231, \quad 312, \quad 321,$$

där tex 213 betecknar att herre 1 får hatt 2, herre 2 hatt 1 och herre 3 hatt 3, osv. Av dessa 6 möjligheter har följande 2 egenskapen att ingen herre får rätt hatt:

$$231, \quad 312.$$

Sannolikheten är därför $2/6 = \boxed{1/3}$.

2. (a) Vi har

$$1 = \int_{-0.3}^{1} f(t)\,dt = 0.3 + \int_{0}^{1} (1 - at)\,dt = 0.3 + 1 - a/2,$$

så $\boxed{a = 0.6}$.

(b) Fördelningsfunktionen är $F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds$. Låt oss behandla de tre intervallen $t < -0.3$, $-0.3 \leq t < 0$, $0 \leq t < 1$ samt $t \geq 1$ separat. Om $t < -0.3$ så är $F(t) = 0$ och om $t \geq 1$ så är $F(t) = 1$. Om $-0.3 \leq t < 0$ så gäller

$$F(t) = \int_{-0.3}^{t} 1\,ds = t + 0.3.$$

Om $0 \leq t < 1$ så gäller

$$F(t) = \int_{-0.3}^{0} 1\,ds + \int_{0}^{t} (1 - as)\,ds = 0.3 + t - 0.3t^2.$$

Så svaret blir:

$$\boxed{F(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t < -0.3, \\ t + 0.3, & \text{om } -0.3 \leq t < 0, \\ 0.3 + t - 0.3t^2, & \text{om } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{om } t \geq 1. \end{cases}}$$

(c) Väntevärdet ges av

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-0.3}^{1} t f(t)\,dt = \int_{-0.3}^{0} t\,dt + \int_{0}^{1} t(1 - at)\,dt \\ &= -\frac{(0.3)^2}{2} + \frac{1}{2} - 0.6\frac{1^3}{3} = \boxed{0.255}. \end{aligned}$$

(d)

$$P(|X - 0.5| \leq 0.6) = P(-0.1 \leq X \leq 1.1) = 1 - P(X < -0.1) = 1 - 0.2 = \boxed{0.8}.$$

3. (a) Man kan ta sig från A till B så länge inte båda vägarna mellan dem är igensnöade, vilket har sannolikhet $\boxed{1 - p^2}$.

(b) Vi delar upp i två fall: man kan inte ens ta sig från A till B, eller man kan ta sig från A till B men inte vidare till C. Den första möjligheten har sannolikhet p^2, den andra $(1-p^2)p^2$ (där $(1-p^2)$ ger sannolikheten att AB är passerbar och p^2 att BC inte är det). Eftersom de två fallen är oförenliga så blir svaret $p^2+(1-p^2)p^2 = 2p^2 - p^4$.

(c) Med hjälp av vad vi räknade ut ovan så ser vi att

$$P(A \leftrightarrow B \mid A \not\leftrightarrow C) = \frac{P(A \leftrightarrow B \text{ men } B \not\leftrightarrow C)}{P(A \not\leftrightarrow C)} = \frac{(1-p^2)p^2}{2p^2-p^4} = \boxed{\frac{1-p^2}{2-p^2}}.$$

4. Här handlar det om hypergeometrisk fördelning $\mathrm{Hyp}(N,n,p)$ med urval $n=5$, sannolikhet $p=m/N=0.06$ och populationsstorlek $N=100$ i delarna (a) och (b), samt $N=3550$ i del (c).

(a) Med formeln för hypergeometrisk fördelning får vi

$$\boxed{\frac{\binom{94}{3}\binom{6}{2}}{\binom{100}{5}} \approx 0.0267.}$$

(b) Svaret fås genom att summera sannolikheterna för exakt 0 och exakt 1:

$$\boxed{\frac{\binom{94}{5}\binom{6}{0}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{94}{4}\binom{6}{1}}{\binom{100}{5}} \approx 0.972.}$$

(c) Vi tillämpar approximation med Poissonfördelning, $\mathrm{Hyp}(N,n,p) \approx \mathrm{Po}(np)$ om $p+n/N < 0.1$ vilket gäller här då $p+n/N = 0.06+5/3550 \approx 0.061$. Vi har att $np = 0.3$ vilket ger svaret

$$\boxed{\approx e^{-0.3} + (0.3)e^{-0.3} \approx 0.963}.$$

5. (a) $E(X_1+X_2) = E(X_1)+E(X_2)$ där $E(X_1) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{3}$ och $E(X_2) = (-1)\cdot\frac{1}{3} + 0 + 1\cdot\frac{1}{3} = 0$ så $\boxed{E(X) = \frac{5}{3} \approx 1.67}$.
$V(X_1+X_2) = V(X_1)+V(X_2)$ där $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 1^2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{3} + 3^2\cdot\frac{1}{6} - (\frac{5}{3})^2 = \frac{5}{9} \approx 0.556$ och $V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = 1\cdot\frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3} \approx 0.667$ så $\boxed{V(X) = \frac{5}{9} + \frac{2}{3} = \frac{11}{9} \approx 1.22}$.

(b) I följande tabell listas de möjliga värdena för X_1 horisontellt och X_2 vertikalt, med motsvarande värde för X (och sannolikhet) i tabellen:

	1	2	3
-1	$0\ (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6})$	$1\ (\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9})$	$2\ (\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18})$
0	$1\ (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6})$	$2\ (\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9})$	$3\ (\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18})$
1	$2\ (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6})$	$3\ (\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9})$	$4\ (\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18})$

Genom att addera sannolikheterna för de olika värdena i tabellen får vi sannolikhetsfunktionen:

k:	0	1	2	3	4
$p(k)$:	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$

6. (a) Vi använder $I_\mu = (\overline{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n})$ med $\alpha = 0.05$ och $n=5$. Vi har $t_{0.025}(4) = 2.7764$ vilket med $\overline{x} = 1.865$, $s = 1.858$ ger $\boxed{I_\mu = [-0.44, 4.17]}$.

(b) Vi använder $I_{\sigma^2} = ((n-1)s^2/\chi^2_{\alpha/2}(n-1), (n-1)s^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1))$ med $\alpha = 0.05$ och $n = 5$. Vi har $\chi^2_{0.025}(4) = 11.143$ och $\chi^2_{0.975}(4) = 0.4844$ vilket med $s^2 = 3.45$ ger $\boxed{I_{\sigma^2} = [1.24, 28.5]}$.

7. Här anges inte H_1 utan vi får specificera den. Eftersom H_0 är symmetrisk och inget annat anges så väljer vi den tvåsidiga mothypotesen H_1: $\mu \neq \mu_0$. Vi använder testvariabeln

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$

där μ betecknar det sanna väntevärdet. Låt $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, då gäller att $Z \sim$N(0,1). Om $\mu_0 = 3$ och $\mu = 3.2$ samt $\sigma = 1.9$ så gäller alltså att $Z_0 = Z + \frac{0.2}{1.9}\sqrt{n} = Z + \frac{2}{19}\sqrt{n}$.
Med $\alpha = 0.05$ så ges styrkan som $1 - \beta$ där $\beta = P_\mu(|Z_0| \leq 1.96)$ är sannolikheten för ett fel av typ II. Vi vill att styrkan i $\mu = 3.2$ ska vara 0.9, vilket ger

$$\beta = 0.1 = P_{\mu=3.2}(-1.96 \leq Z_0 \leq 1.96) = P_{\mu=3.2}(-1.96 - \tfrac{2}{19}\sqrt{n} \leq Z \leq 1.96 - \tfrac{2}{19}\sqrt{n}).$$

Här gör vi en approximation genom att bortse från den undre begränsningen (det är rimligt att anta att vi ändå vill ha $n \geq 10$ och det är väldigt osannolikt att $Z < -1.96 - \frac{2}{19}\sqrt{10} \approx -2.29$). Då blir vårt kriterium att

$$P_{\mu=3.2}(Z \leq 1.96 - \tfrac{2}{19}\sqrt{n}) \approx 0.1.$$

Detta betyder att $1.96 - \frac{2}{19}\sqrt{n} \approx -1.28$ (90% kvantil), vilket ger $\boxed{n \geq 947}$.
Observera att vi använde 1.96 pga att vi genomförde två-sidigt test. Då detta ej specificerats i frågan hade det också gått bra med ett ensidigt test, och då med 1.6449 istället för 1.96. Resultatet blir då $n \geq 773$.

8. Låt $z = \log y = \log a + x \log b$. Vi använder linjär regression för att skatta $\alpha = \log a$ och $\beta = \log b$. Tabellen med z-värden är

x:	65	70.3	75.6	80.9	86.2	91.5	96.8	102.1	107.4
z:	−0.0335	0.1052	0.3562	0.4154	0.7770	0.7114	0.8197	0.8825	1.4980

Vanliga metoden för linjär regression ger skattningarna

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i z_i - 9\overline{x} \cdot \overline{z}}{\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - 9(\overline{x})^2} \approx 0.0304, \qquad \hat{\alpha} = \overline{z} - \hat{\beta}\overline{x} \approx -2.01.$$

Alltså blir våra skattningar av a, b:

$$\boxed{\hat{a} = e^{\hat{\alpha}} \approx 0.134, \quad \hat{b} = e^{\hat{\beta}} \approx 1.031}.$$