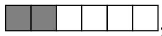
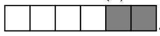
Lösning till tentamen 2019-01-08 Examinator:
Sannolikhetsteori och statistik TMS137 J. Björnberg

1. (a) Antal möjiga utfall är $m = 9! \cdot \binom{26}{9} = 26!/17!$ eftersom det är 9 utav 26 bokstäver som ska väljas och permuteras. Om SAD förekommer så kan S:et vara på plats 1–7, sedan ska 6 bokstäver permuteras bland de återstående 23. Detta ger $g = 7 \cdot 6! \cdot \binom{23}{6}$ gynnsamma utfall och svaret

$$\text{svar} = \frac{g}{m} = \frac{7 \cdot 6! \cdot \binom{23}{6}}{9! \cdot \binom{26}{9}} = \frac{7}{26 \cdot 25 \cdot 24} = \boxed{\frac{7}{15\,600} \approx 0.00045}.$$

(b) Nu behöver man inte tänka på hur bokstäverna ordnas utan bara vilka som väljs, dvs vi har en hypergeometrisk fördelning. Sannolikheten att välja alla 3 av S, A, D är

$$\text{svar} = \boxed{\frac{\binom{3}{3}\binom{23}{6}}{\binom{26}{9}} = \frac{21}{650} \approx 0.032}.$$

2. Vi börjar med att lista alla möjligheter för första limousinen: (i) , (ii) , (iii) , (iv) , samt (v) . De har sannolikhet $\frac{1}{5}$ vardera.

(a) Vi skriver $A$ för händelsen att tredje limousinen får plats, och delar upp i fallen ovan med hjälp av lagen om total sannolikhet. I fallen (i) och (v) är 2 av 3 möjliga platser för andra limousinen ok, i fall (iii) är alla (2st) ok, i övriga fall är inga ok. Detta ger

$$P(A) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{3} + 0 + \tfrac{1}{5} + 0 + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{3} = \boxed{\tfrac{7}{15} \approx 0.47}.$$

(b) Låt $B$ vara händelsen att andra limousinen står längst fram. Detta kan ske i fallen (iii)–(v) med sannolikhet $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ respektive $\frac{1}{3}$. Så

$$P(B) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{3} = \boxed{\tfrac{4}{15} \approx 0.267}.$$

(c) Vi söker $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$. För $A \cap B$ krävs att vi är i fall (iii) eller (v). Vi får

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}$$

och därmed

$$P(A \mid B) = \frac{1/6}{4/15} = \boxed{\frac{5}{8} = 0.625}.$$

(d) Nu ska vi ha

$$P(B \mid A) = P(A \mid B)\frac{P(B)}{P(A)},$$

enligt Bayes sats. Vi såg tidigare att $P(A) = \frac{7}{15}$ och $P(B) = \frac{4}{15}$ så $P(B \mid A) = \frac{4}{7}P(A \mid B)$ dvs $\boxed{P(B \mid A) = 5/14}$.

3. Vi ser genast att $X + Y$ aldrig är mindre än 0 eller större än 2 så $\boxed{a(t) = d(t) = 0}$.

Låt nu $0 < t \leq 2$. Faltningsformeln säger

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) f_Y(t-s)\, ds.$$

För att vi ska ha $f_X(s)f_Y(t-s) \neq 0$ krävs att $0 < s \leq 1$ samt $0 < t - s \leq 1$, dvs $s > \max(0, t-1)$ samt $s \leq \min(1, t)$. Alltså gäller

$$f_{X+Y}(t) = \int_{\max(0,t-1)}^{\min(1,t)} 2s = \left[s^2\right]_{\max(0,t-1)}^{\min(1,t)}.$$

Om $0 < t \leq 1$ så blir detta

$$\boxed{b(t) = \left[s^2\right]_0^t = t^2},$$

om $0 < t \leq 1$ så blir det

$$\boxed{c(t) = \left[s^2\right]_{t-1}^1 = 2t - t^2}.$$

4. (a) Nedan har vi utökat tabellen med marginalfördelningarnas sannolikhetsfunktioner. Man får dem genom att summera respektive rad eller kolonn.

| $p_{X,Y}(j,k)$ | $k=1$ | 2 | 3 | 4 | $p_X(j)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $j=1$ | 0.06 | 0.01 | 0.1 | 0.03 | 0.2 |
| 2 | 0.09 | 0.09 | 0.1 | 0.02 | 0.3 |
| 3 | 0.15 | 0.1 | 0.2 | 0.05 | 0.5 |
| $p_Y(k)$ | 0.3 | 0.2 | 0.4 | 0.1 | |

(b) Detta beräknas genom $p_{X|Y=3}(j) = p_{X,Y}(j,k)/p_Y(3)$, så

$$\boxed{p_{X|Y=3}(1) = 0.1/0.4 = 1/4, p_{X|Y=3}(2) = 0.1/0.4 = 1/4, p_{X|Y=3}(3) = 0.2/0.4 = 1/2}.$$

(c) Nej, tex $p_{X,Y}(2,3) = 0.1 \neq p_X(2)p_Y(3)$.

(d) I tabellen har vi lagt till värdet på $\max(X,Y)$ i rött:

| $p_{X,Y}(j,k)$ | $k:1$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $j:1$ | 1, 0.06 | 2, 0.01 | 3, 0.1 | 4, 0.03 |
| 2 | 2, 0.09 | 2, 0.09 | 3, 0.1 | 4, 0.02 |
| 3 | 3, 0.15 | 3, 0.1 | 3, 0.2 | 4, 0.05 |

Väntevärdet blir alltså

$$E[\max(X,Y)] = 1\cdot 0.06 + 2\cdot(0.01+0.09+0.09) + 3\cdot(0.15+0.1+0.2+0.1+0.1) + 4\cdot 0.1 = \boxed{2.79}.$$

5. (a) Antal inköp $X$ där avrundningens storlek var större än 0.3 har fördelning $\text{Bin}(10, p)$ där $p = 0.4$ är sannolikheten för en sådan avrundning vid ett givet inköp. Detta ger

$$P(X=5) = \binom{10}{5}(0.4)^4(0.6)^5 \approx \boxed{0.20}.$$

(b) Nu har $X$ fördelning $\text{Bin}(100, 0.4)$. Eftersom $np(1-p) = 24 > 10$ kan vi tillämpa normalapproxoimation vilket ger $X \approx \text{N}(40,\, 4.89)$ och därmed

$$P(X \geq 50) = P\Big(\frac{X-40}{4.89} \geq \frac{10}{4.89}\Big) \approx 1 - \Phi(2.04) \approx \boxed{0.02068}.$$

(c) Nu har $X$ fördelning $\text{Bin}(100, 0.02)$ så det är Poisson-approximation som gäller, $X \approx \text{Po}(2)$ och

$$P(X=5) \approx \boxed{e^{-2}\frac{2^5}{5!} \approx 0.036}.$$

6. (a) För $\mu$ blir konfidensintervallet av formen $I_\mu = (-\infty, \overline{x} + t_{0.05}(n-1)s/\sqrt{n})$ där $n = 7$ och $\overline{x} = -1.03$ samt $s = 0.699$. Med $t_{0.05}(6) = 1.94$ får vi alltså

$$\boxed{I_\mu = (-\infty, -0.52)}.$$

(b) För $\sigma$ blir konfidensintervallet av formen $I_\sigma = (0, s\sqrt{(n-1)/\chi^2_{0.95}(n-1)})$, undre gränsen är 0 eftersom standardavvikelser aldrig är negativa. Då $\chi^2_{0.95}(6) = 1.64$ så får vi

$$\boxed{I_\sigma = (0, 1.34)}.$$

7. (a) Man går vidare om man kan *visa* att många kör för fort, så man ska ta $\mathrm{H}_1$: $p > p_0$ där som sagt $p_0 = 0.5$.

(b) Om $\mathrm{H}_0$ stämmer så har $Z_0$ approximativ fördelning N(0,1), på grund av centrala gränsvärdessatsen (CGS). Detta för att $\overline{X}$ kan skrivas som $\overline{X} = X/n$ där $X$ har binomialfördelning $\mathrm{Bin}(n, p_0)$, och då $n = 60$ blir $np_0(1-p_0) > 10$ vilket är ok för CGS.

(c) Observerat värde av $Z_0$ är

$$z = \frac{0.6 - 0.5}{\sqrt{0.5^2/60}} \approx 1.55.$$

Detta ger $P$-värdet

$$P = P(Z_0 > z) = \boxed{1 - \Phi(1.55) \approx 0.06}.$$

(d) Eftersom vi nu antar att sanna $p = p_1$ så gäller att $Z_1 \approx$ N(0,1) med samma resonemang som förut.

(e)

$$Z_0 = \frac{p_1 - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} + \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{p_0(1-p_0)}} Z_1 = 0.89 + 0.98 \cdot Z_1.$$

Så $Z_0$ har approximativ fördelning $\mathrm{N}(0.89, 0.98)$.

(f) Styrkan är sannolikheten att $\mathrm{H}_0$ förkastas, dvs

$$\begin{aligned} \text{styrka} &= P(Z_0 > \lambda_{0.05}) = P(0.89 + 0.98 \cdot Z_1 > 1.64) \\ &= P(Z_1 > 0.77) \approx 1 - \Phi(0.77) \\ &\approx \boxed{0.22}. \end{aligned}$$

8. (a) Vi får $\beta^* = S_{xy}/S_{xx} = 60.12/202.3 = \boxed{0.297}$ och $\alpha^* = \overline{y} - \beta^*\overline{x} = \boxed{4.16}$, samt $y^* = \alpha^* + \beta^* x_0 = \boxed{11.56}$.

(b) Konfidensintervallet ska vara av formen $I_\beta = (\beta^* \pm t_{0.025}(n-2)s/\sqrt{S_{xx}})$, där

$$s = \sqrt{\frac{S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}}{n-2}} = 0.135$$

så

$$\boxed{I_\beta = (0.297 \pm 0.026) = (0.271, 0.323)}.$$