1. Vi får att $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = (0.3)P(B)$ och att $P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 0.9$. Alltså gäller

$$3P(B) = P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B) = 0.9 + (0.3)P(B).$$

Detta ger oss svaret:

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{3} \quad \text{och} \quad P(A) = \frac{2}{3}}.$$

2. (a) Skriv A för händelsen att man får exakt 2 kungar. Antal möjliga kombinationer av 13 kort är $\binom{52}{13}$. Antal med exakt 2 kungar är $\binom{4}{2}\binom{48}{11}$, eftersom vi ska välja 2 bland 4 kungar och 11 bland de 48 icke-kungarna. Så

$$\text{svar: } P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}} \approx \boxed{0.213}.$$

(b) Skriv B för händelsen att man får exakt 1 ess. Liknande resonemang som ovan ger

$$\text{svar: } P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{10}}{\binom{52}{13}} \approx \boxed{0.094}.$$

(c)

$$\text{svar: } P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{10}}{\binom{4}{2}\binom{48}{11}} \approx \boxed{0.439}.$$

3. Meddelandena kommer som en Poissonprocess med intensitet $\lambda = \frac{1}{2}$ per minut.

(a) totala antalet har fördelning $\text{Po}(45\lambda)$ med väntevärde $45\lambda = 45/2 = \boxed{22.5}$.

(b) antalet X under de viktigaste 5 minuterna har fördelning $\text{Po}(5\lambda)$, så

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - e^{-2.5} - (2.5)e^{-2.5} - \frac{(2.5)^2}{2}e^{-2.5} \approx \boxed{0.456}. \end{aligned}$$

(c) mellantiderna är oberoende, exponentialfördelade med parameter $\lambda = \frac{1}{2}$, så sannolikheten är

$$(1 - e^{-3\lambda})(1 - e^{-\lambda}) = 1 - e^{-0.5} - e^{-1.5} + e^{-2} \approx \boxed{0.306}.$$

(d) $\text{Po}(45\lambda)$ är approximativt $\text{N}(45\lambda, \sqrt{45\lambda})$ eftersom $45\lambda = 22.5 > 15$. Om Y betecknar totala antalet så gäller alltså:

$$P(Y \leq 25) = P\left(\frac{Y - 22.5}{\sqrt{22.5}} \leq 0.53\right) \approx \Phi(0.53) = \boxed{0.7019}$$

4. (a) Genom att integrera får vi uttrycket:

$$F(t) = \begin{cases} b - ae^{-t} + e^{-2t}, & \text{om } t \geq 0, \\ 0, & \text{om } t < 0, \end{cases}$$

där b är en till konstant. Eftersom $F(\infty) = 1$ så gäller $b = 1$ och vidare så gäller även $F(0) = 0$, så $\boxed{a = 2}$ och

$$\boxed{F(t) = \begin{cases} 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}, & \text{om } t \geq 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}}$$

(b) (i) För väntevärdet får vi $E(Y) = E(XZ) = E(X)E(Z) = \boxed{0}$ då X och Z är oberoende och $E(Z) = 0$. För variansen gäller $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(X^2)$, då $Z^2 = 1$ och $E(Y) = 0$. Alltså är

$$V(Y) = E(X^2) = \int_0^\infty t^2(2e^{-t} - 2e^{-2t})dt = \boxed{\tfrac{7}{2} = 3.5}$$

(ii) Låt $t > 0$. Då gäller

$$P(Y > t) = P(Z = +1 \text{ och } X > t) = \tfrac{1}{2}P(X > t) = \tfrac{1}{2}(1 - F(t)),$$

eftersom Y bara kan vara positiv om $Z = +1$ (för X är aldrig negativ). Så $P(Y \leq t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(t)$. På liknande vis gäller

$$P(Y \leq -t) = P(Z = -1 \text{ och } X \geq t) = \tfrac{1}{2}P(X \geq t) = \tfrac{1}{2}(1 - F(t)).$$

Sammanfattningsvis:

$$\boxed{P(Y \leq x) = \begin{cases} 1/2 + 1/2F(x), & \text{om } x \geq 0, \\ 1/2 - 1/2F(-x), & \text{om } x < 0. \end{cases}}$$

5. Lådornas vikt har väntevärde $\mu = 0.15 \cdot 5 + 0.65 \cdot 12 + 0.2 \cdot 18 = 12.15$kg och standardavvikelse $\sigma = \sqrt{0.15 \cdot 5^2 + 0.65 \cdot 12^2 + 0.2 \cdot 18^2 - \mu^2} = 3.81$kg. Om n är stort så har alltså n lådor en totalvikt X som är approximativt $\mathrm{N}(12.15n, 3.81\sqrt{n})$, enligt CGS.

(a) Med $n = 120$ så har vi $12.15n = 1458$ och $3.81\sqrt{n} = 41.7$. Vi söker

$$P(X + 90 \leq 1500) = P\Big(\frac{X - 1458}{41.7} \leq -1.15\Big) \approx 1 - \Phi(1.15) = \boxed{0.1251}.$$

(b) Vi vill lösa för n:

$$0.25 = P(X + 90 > 1500) = P\Big(\frac{X - 12.15n}{3.81\sqrt{n}} > \frac{1410 - 12.15n}{3.81\sqrt{n}}\Big) \approx 1 - \Phi(z),$$

där $z = (1410 - 12.15n)/3.81\sqrt{n}$. Dvs, $\Phi(z) \approx 0.75$. En titt i tabellen ger $\Phi(0.67) = 0.7486$ medans $\Phi(0.68) = 0.7517$. För att vara på den säkra sidan om 0.75 så väljer vi $z = 0.68$. Vi ska alltså lösa för n:

$$0.68 = \frac{1410 - 12.15n}{3.81\sqrt{n}}.$$

Detta ger $n \approx 113.8$ dvs vi tar $\boxed{n \leq 113}$.

6. (a) Med okänt σ så är det t-test som gäller. Om H_0 skulle stämma så skulle $T_0 = (\sum X_i - n\mu_0)/(S\sqrt{n})$ vara $t(n-1)$-fördelad. Vi förkastar H_0 om det observerade $|T_0| > t_{0.005}(15) = 2.95$. Här är

$$s^2 = \frac{22.5 - (14.3)^2/16}{15} \approx 0.648, \qquad s \approx 0.805,$$

så vår observation av T_0 är $(-14.3 + 16)/(4 \cdot 0.805) \approx 0.53$. Då $\boxed{0.53 < 2.95}$ så kan vi ej förkasta H_0.

(b) (i) Med $\sigma = 1$ känt så skulle H_0 medföra att $Z_0 = (\sum X_i - n\mu_0)/(\sigma\sqrt{n})$ skulle vara N(0,1). Vår observation:

$$z_0 = \frac{16 - 14.3}{\sqrt{16}} = 0.425$$

ger

$$p = 2(1 - \Phi(0.425)) \approx \boxed{0.68}.$$

(ii) Vi har nu att

$$Z_0 = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{n(\mu - \mu_0)}{\sqrt{n}} = Z + 0.4$$

där $Z \sim$ N(0,1). Styrkan är $1 - \beta$ där β är sannolikheten att Z_0 hamnar inom acceptansområdet för H_0, dvs

$$\begin{aligned}\beta &= P(-2.58 < Z_0 < 2.58) = P(-2.98 < Z < 2.18)\\ &= \Phi(2.18) - (1 - \Phi(2.98)) = 0.9986 + 0.9854 - 1 = 0.984.\end{aligned}$$

Så styrkan är $\boxed{0.016}$.

7. Villkoren för normalapproximation är uppfyllda. Vi ska ha ett tvåsidigt intervall, som ska vara av formen

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}.$$

Här är

$$n_1 = 1000, \quad \hat{p}_1 = 13/1000 = 0.013, \qquad n_2 = 1200, \quad \hat{p}_2 = 15/1200 = 0.0125$$

så vi får

$$\boxed{I = [0.0005 \pm 2.58 \cdot 0.0048] = [-0.0119, 0.0129]}.$$

Intervallet täcker 0 så denna studie ger inte stöd för att det skulle vara en signifikant skillnad.

8. Låt σ_1^2 respektive σ_2^2 beteckna varianserna i den första respektive andra metoden. Dessa skattas med s_1^2 resp s_2^2. Skriv $n_1 = 13$ och $n_2 = 9$.

Vi har två möjligheter: antingen ett nedåt begränsat intervall för σ_2^2/σ_1^2 av formen

$$I = \Big[\frac{s_2^2/s_1^2}{F_\alpha(n_2 - 1, n_1 - 1)}, \infty\Big),$$

eller ett uppåt begränsat intervall for σ_1^2/σ_2^2, av formen

$$J = \Big(0, \frac{s_1^2}{s_2^2} F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)\Big].$$

Vi har, med $\alpha = 0.05$, att $F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_\alpha(12, 8) = 3.28$ och $F_\alpha(n_2 - 1, n_1 - 1) = F_\alpha(8, 12) = 2.85$. Vidare är $s_1^2 = 4.18$ och $s_2^2 = 1.61$. Så intervallet är

$$\boxed{I = [0.135, \infty) \quad \text{alternativt} \quad J = (0, 8.56]}.$$

Båda intervallen täcker 1 så vi kan *inte* mot bakgrund av detta säga att $\sigma_2 > \sigma_1$. Konfidensgraden är 95%.