TENTAMEN 2016-12-21 | Examinator och jour:
Dataanalys och statistik TMS136 | J. Björnberg

Tentamen består av 8 uppgifter om totalt 50 poäng. För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 20, 30 resp. 40 poäng. Lösningarna skall vara väl motiverade.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare, boken Matematisk statistik av Ulla Dahlblom, Tabell- och formelsamling av Håkan Blomqvist.
Boken eller formelsamlingen får inte innehålla egna anteckningar. **Lycka till!**

1. Händelserna A och B uppfyller följande:

$$P(A \mid B) = 0.3, \quad P(A^c \cap B^c) = 0.1, \quad \text{samt} \quad P(A) = 2P(B).$$

Beräkna $P(A)$ och $P(B)$. (6p)

2. Ur en vanlig kortlek med 52 kort delas 13 ut slumpmässigt. Beräkna sannolikheterna för att man får:

   (a) exakt 2 kungar (2p)

   (b) exakt 2 kungar *och* exakt 1 ess (2p)

   (c) exakt 1 ess *givet* att man får exakt 2 kungar. (1p)

3. En populär student får meddelanden på sin mobiltelefon enligt en Poissonprocess, med i snitt ett meddelande per två minuter. I en föreläsning på 45 minuter, vad är

   (a) förväntat antal meddelanden? (2p)

   (b) sannolikheten att det kommer minst 3 meddelanden under föreläsningens 5 viktigaste minuter? (2p)

   (c) sannolikheten att det första meddelandet kommer inom 3 minuter, och att det andra meddelandet kommer inom 1 minut från det första? (2p)

   (d) (approximativt) sannolikheten att det kommer totalt högst 25 meddelanden? (2p)

4. En slumpvariabel X har följande täthetsfunktion (frekvensfunktion):

$$f(t) = \begin{cases} ae^{-t} - 2e^{-2t}, & \text{om } t \geq 0, \\ 0, & \text{om } t < 0, \end{cases}$$

   (a) Beräkna: konstanten a samt fördelningsfunktionen $F(t)$ för X. (3p)

   (b) Låt nu Z vara en sumpvariabel som, oberoende av X, tar värden ± 1 med lika sannolikhet, och skriv $Y = XZ$ för deras produkt. Beräkna:

      (i) väntevärdet $E(Y)$ samt variansen $V(Y)$, (2p)

      (ii) fördelningsfunktionen hos Y. (2p)

Fortsättning på nästa sida →

5. En flyttkarl bär in lådor i en rymlig hiss. Antag att lådornas vikter är slumpmässigt fördelade och oberoende, med 15% på 5kg, 65% på 12kg och 20% på 18kg. Flyttkarlen själv väger 90kg. Hissen har en maximal kapacitet på 1500kg.

   (a) Vad är sannolikheten att hissen klarar 120 lådor plus flyttkarlen? (3p)

   (b) Hur många lådor bör han maximalt ta med för att risken för överlastning ska vara högst 25%? (3p)

6. Mätningar $x_1, \ldots, x_{16}$, som kan antas följa en normalfördelning, uppfyller:

$$\sum_{i=1}^{16} x_i = -14.3 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 22.5.$$

   (a) Genomför ett test av hypoteserna $H_0 : \mu = -1$ mot $H_1 : \mu \neq -1$ på signifikansnivå $\alpha = 0.01$. (2p)

   (b) Antag nu att $\sigma = 1$ kan betraktas som känd. Vad är då

      (i) testets p-värde (minsta signifikansnivån som vi förkastar H_0 på)? (2p)

      (ii) testets styrka i $\mu = -0.9$? (2p)

7. En tillverkare av maskiner vill utvärdera två olika producenter av en viss typ av komponent. De beställer provsändningar på 1000 respektive 1200 komponenter från de två företagen, varav 13 respektive 15 visar sig felaktiga. Avgör med hjälp av lämpligt konfidensintervall om det är en väsentlig skillnad mellan felfrekvenserna på producenternas komponenter. Använd konfidensgrad 99%. (6p)

8. Man vill utvärdera metoder för ytbehandling för att avgöra vilken metod som har mindre variabilitet. Den första metodens ytfriktion mättes 13 gånger med mätresultaten

$$\sum_{i=1}^{13} x_i = 24.0 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{13} x_i^2 = 94.5.$$

   Den andra metoden mättes 9 gånger med resultaten

$$\sum_{i=1}^{9} y_i = 9.74 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 23.5.$$

   Antag at x respektive y är oberoende stickprov ur $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1)$ respektive $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Ta fram ett lämpligt *ensidigt* konfidensintervall och avgör om vi bör tro att $\sigma_2 > \sigma_1$. Ange konfidensgraden på ditt intervall. (6p)