TENTAMEN 2017-12-20 Examinator:
Sannolikhetsteori och statistik TMS137 J. Björnberg

Tentamen består av 8 uppgifter om totalt 50 poäng. För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 20, 30 resp. 40 poäng. Lösningarna skall vara väl motiverade.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare, boken Stokastik av Alm & Britton, Formelsamling i matematisk statistk.
Boken eller formelsamlingen får inte innehålla egna anteckningar. **Lycka till!**

1. Orten Byköping har ett undermåligt elnät som regelbundet drabbas av diverse fel. Bland felen är jordfel 3 gånger så vanliga som övriga typer av fel. Jordfel leder i 9 fall av 10 till strömavbrott, övriga fel i 6 fall av 10. Vid ett strömavbrott, vad är sannolikheten att det beror på ett jordfel? (6p)

2. En kontinuerlig slumpvariabel X har täthetsfunktion

$$f(t) = \begin{cases} c(t-1)(2-t), & \text{om } 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

där c är en konstant. Bestäm

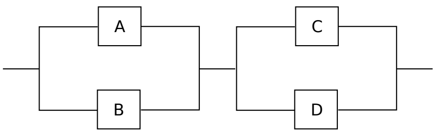
(a) värdet på konstanten c, (1p)

(b) väntevärdet $E(X)$, (1p)

(c) väntevärdet $E(X^3)$, (2p)

(d) fördelningsfunktionen $F(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$. (2p)

3. Systemet nedan fungerar om det finns en väg från vänster till höger genom fungerande komponenter. Komponenterna A, B, C, D är oberoende.



(a) Om varje enskild komponent fungerar med sannolikhet p, vad är sannolikheten att systemet fungerar? (2p)

(b) Under samma antagande som i (a), vad är sannolikheten att systemet fungerar givet att A är trasig? (2p)

(c) *I del (c) ska man ej längre anta att A är trasig.*
Antag nu att varje enskild komponent slutar fungera efter en slumpmässig tid som är exponentialfördelad med väntevärde 30 sekunder. Vad är

(i) sannolikheten att systemet fungerar efter t minuter? (2p)

(ii) väntevärdet hos tiden T till systemet slutar fungera? (2p)
Tips: $\int_0^\infty te^{-\lambda t}dt = 1/\lambda^2$.

4. Kajsa har en spellista med 100 låtar som hon använder när hon tränar. 30 av låtarna är av Lasse Stefanz. Vid varje träningspass spelas 5 slumpmässigt valda låtar (utan repetitioner). Vad är

(a) Väntevärde och varians hos antal Lasse Stefanz-låtar under ett givet pass? (2p)

(b) Sannolikheten att hon, över 20 pass, hör *i snitt* minst en Lasse Stefanz-låt per pass? (4p)

Fortsättning på nästa sida →

5. Den tvådimensionella slumpvariabeln (X, Y) har sannolikhetsfunktion $p(j, k)$ där

$$p(1,1) = 0.2, \quad p(1,0) = 0.2, \quad p(0,-1) = 0.1, \quad p(-1,-1) = 0.5.$$

Bestäm följande: $E(XY)$, $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ och slutligen $\rho(X, Y)$. (6p)

6. Två filmbolag, A och B, släpper samtidigt varsin film på bio. De jämför besöksstatistiken under den första veckan efter premiär på 5 biografer (med samma kapacitet) runtom i landet, med resultaten:

	Bio Rondo	Blå Prinsen	Klövern	Skära Kvarn	Ankaret
A:	55	78	101	63	49
B:	63	94	98	68	66

Ta fram ett lämpligt konfidensintervall för att avgöra om det verkar vara en skillnad i popularitet mellan filmerna. Vad är din slutsats? Använd konfidensgrad 95%. (6p)

7. I ett område med många (> 100) vattendrag mäts surheten (pH) i 20 av dem, med resultaten:

7.63	9.29	5.79	6.02	7.87	6.31	7.23	7.70	8.19	5.84
6.88	6.97	7.01	6.92	7.38	6.03	5.67	6.93	5.00	6.11

Vattnet klassas som surt om pH är under 7.0. Vi är intresserade av andelen sura vattendrag i området, vilken vi betecknar med p.

(a) Beräkna ett tvåsidigt, samt ett ensidigt övre begränsat, konfidensintervall för p. Använd (approximativ) konfidensgrad 95% för båda. (3p)

(b) Om man vill ha ett tvåsidigt konfidensintervall med längd högst 0.3, samt (approximativ) konfidensgrad 99%, hur många mätningar bör göras? (3p)

8. Följande data tros komma från en binomialfördelning $\mathrm{Bin}(5, p)$ för något p:

Värde:	0	1	2	3	4	5
Frekvens:	38	138	158	128	31	7

(a) Använd medelvärdet $\overline{x}$ för att ta fram en lämplig punktskattning $\hat{p}$ för p. (2p)

(b) Testa på signifikansnivå 5% om man bör förkasta hypotesen H_0 att datan kommer från en binomialfördelning. (4p)