TENTAMEN 2018-08-28 Examinator:
Sannolikhetsteori och statistik TMS137 J. Björnberg

Tentamen består av 8 uppgifter om totalt 50 poäng. För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 20, 30 resp. 40 poäng. Lösningarna skall vara väl motiverade.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare, boken Stokastik av Alm & Britton, Formelsamling i matematisk statistk.
Boken eller formelsamlingen får inte innehålla egna anteckningar. **Lycka till!**

1. Tre förnäma herrar kommer till en fest och lämnar sina hattar på hatthyllan. När de går så tar de varsin hatt slumpmässigt från hyllan. Vad är sannolikheten att ingen av dem får rätt hatt? (5p)

2. En kontinuerlig slumpvariabel X har täthetsfunktion $f(t)$ där

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } -0.3 \leq t \leq 0, \\ 1 - at, & \text{om } 0 < t \leq 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

   Bestäm:

   (a) värdet på konstanten a, (2p)
   (b) fördelningsfunktionen $F(t)$ för X, (2p)
   (c) väntevärdet $E(X)$, (2p)
   (d) sannolikheten $P(|X - 0.5| \leq 0.6)$. (2p)

3. Orterna A, B och C är förbundna med vägar på följande vis. Det finns två vägar från A till B, två vägar från B till C, och inga andra vägar. Varje väg blockeras av snöfall med sannolikhet p, oberoende av varje annan väg. Vad är sannolikheten att man:

   (a) kan ta sig från A till B? (2p)
   (b) *inte* kan ta sig från A till C? (3p)
   (c) kan ta sig från A till B, *givet* att man inte kan ta sig från A till C? (3p)

4. Ett varuparti består av 100 enheter, varav exakt 6 är defekta. En prospektiv köpare kontrollerar 5 enheter som väljs slumpmässigt, utan återläggning.
   I delarna (a) och (b) får dina svar innehålla binomialkoefficienter.

   (a) Vad är sannolikheten att exakt 2 av de kontrollerade enheterna är defekta? (2p)
   (b) Köparen accepterar partiet om högst en av de kontrollerade enheterna är defekt. Vad är sannolikheten för detta? (2p)

   Antag nu istället att en liknande princip tillämpas på ett parti bestående av 3550 enheter: exakt 6% av enheterna är defekta och en prospektiv köpare inspekterar 5 slumpmässigt valda enheter.

   (c) Beräkna (approximativt) sannolikheterna för att högst en av dem är defekt. (2p)

Fortsättning på nästa sida →

5. Låt X_1 och X_2 vara oberoende slumpvariabler med sannolikhetsfunktionerna $p_1(k) = P(X_1 = k)$ respektive $p_2(k) = P(X_2 = k)$, där

$$p_1(1) = \tfrac{1}{2}, \quad p_1(2) = \tfrac{1}{3}, \quad p_1(3) = \tfrac{1}{6}; \qquad\qquad p_2(-1) = \tfrac{1}{3}, \quad p_2(0) = \tfrac{1}{3}, \quad p_2(1) = \tfrac{1}{3}$$

(och alla övriga $p_1(k), p_2(k) = 0$). Låt $X = X_1 + X_2$. Bestäm:

(a) väntevärdet $E(X)$ och variansen $V(X)$ (3p)

(b) sannolikhetsfunktionen $p(k) = P(X = k)$. (3p)

6. Följande mätvärden kan antas vara oberoende observationer av en normalfördelad storhet med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2.

$$1.87, \quad 3.64, \quad -0.20, \quad 3.79, \quad 0.23.$$

Ta fram tvåsidiga konfidensintervall med konfidensgrad 95% för

(a) väntevärdet μ, (3p)

(b) variansen σ^2. (3p)

7. Antag att man vill genomföra ett hypotestest för väntevärdet μ i en situation med normalfördelad data, där standardavvikelsen $\sigma = 1.9$ är känd sedan tidigare. Nollhypotesen är H_0: $\mu = \mu_0 = 3$ och man vill ha signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Dessutom vill man upptäcka om $\mu \geq 3.2$ med sannolikhet 90% (dvs, man vill att testets *styrka* $\mu = 3.2$ ska vara minst 90%). Beräkna approximativt den storlek på urval n som krävs. (6p)

8. Följande data är observationer av storheter x och y som tros följa ett samband av formen $y = a \cdot b^x$:

x:	65	70.3	75.6	80.9	86.2	91.5	96.8	102.1	107.4
y:	0.967	1.111	1.428	1.515	2.175	2.037	2.270	2.417	4.473

Använd linjär regression för att ta fram skattningar av a och b. (5p)