TENTAMEN 2018-10-31 Examinator:
Sannolikhetsteori och statistik TMS137 J. Björnberg

Tentamen består av 8 uppgifter om totalt 50 poäng. För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 20, 30 resp. 40 poäng inklusive eventuella bonuspoäng. Lösningarna skall vara väl motiverade.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare; boken *Sannolikhetsteori och statistik* av Blom et al, alternativt *Stokastik* av Alm & Britton; samt ett egenhändigt handskrivet formelblad på maximalt en A4-sida (dvs en sida av ett A4-blad).
Boken får inte innehålla egna anteckningar. **Lycka till!**

1. I en kanna ligger åtta lappar med bokstäver på: två med K, tre med A och tre med N. Man plockar fem lappar slumpmässigt.
   (a) Om lapparna plockas *med återläggning*, vad är sannolikheten att man får (i) bokstäverna KANNA, i den ordningen? (ii) bokstäverna K, A, N, N, A i *någon* ordning? (3p)
   (b) Om lapparna plockas *utan återläggning*, vad är sannolikheten att man får (i) bokstäverna KANNA, i den ordningen? (ii) bokstäverna K, A, N, N, A i *någon* ordning? (3p)

2. En kontinuerlig slumpvariabel X har täthetsfunktionen

$$f(t) = \begin{cases} -t, & \text{om } -1 \le t < 0, \\ \frac{3}{2}t^2, & \text{om } 0 \le t < 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

   Beräkna:
   (a) väntevärdet $E(X)$, (2p)
   (b) fördelningsfunktionen $F(t)$, (2p)
   (c) övre och undre kvartilerna, samt (2p)
   (d) väntevärdet $E(g(X))$ där $g(t) = \begin{cases} t, & \text{om } t \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{om } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$ (2p)

3. En symmetrisk tärning kastas antingen en eller två gånger, enligt regeln: om man vid första kastet får högst en 3:a så kastas tärningen en andra gång, annars slutar man efter första kastet. Låt X beteckna värdet vid första kastet och Y värdet vid sista kastet (så om man endast kastar en gång blir Y värdet man får vid det kastet, annars blir Y värdet vid andra kastet). Beräkna följande:
   (a) Sannolikheten att man kastar två gånger. (1p)
   (b) Sannolikheterna $P(Y = 1)$ och $P(Y = 6)$. (2p)
   (c) Sannolikheten $P(X = Y)$ att X och Y är samma värde. (2p)
   (d) Väntevärdet $E(Y)$. (2p)

Fortsättning på nästa sida →

4. På en arbetsplats med 300 medarbetare säljs lotter, med (oberoende) dragningar varje vecka. Antag att varje medarbetare köper varsin lott varje vecka, och att vinstsannolikheten per lott är $p = 10^{-4}$.

   (a) Vad är förväntat antal vinster en given vecka? (1p)

   (b) Vad är, approximativt, sannolikheten att minst 3 vinster delas ut på ett år (52 veckor)? (2p)

   En av medarbetarna lärde sig om Poissonprocesser under sin tid på Chalmers och vill modellera vinsterna under ett år med en Poissonprocess $N(t)$.

   (c) Om tidsenheten är veckor, vilken intensitet λ bör man ta? (1p)

   (d) I denna modell, vad blir sannolikheten att minst en vinst delas ut i mars månad, givet att exakt 3 vinster delades ut under perioden mars till och med maj? (Anta att varje månad består av exakt 4 veckor.) (2p)

5. Ett företag som levererar snabbmat har följande prismodell. Om leveransen sker inom 10 min kostar det 50kr, om det tar mellan 10 och 20 minuter kostar det 20kr, och tar det längre än 20 minuter så är leveransen gratis. Antag att leveranstiderna vid olika beställningar är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde 15 min.

   (a) Vad är väntevärde och standardavvikelse på leveranspriset vid en beställning? (3p)

   (b) Företagets styrelse har satt upp som mål att dra in 30,000kr (brutto) innan nästa budgetperiod. Approximativt hur stor är sannolikheten att detta uppnås efter 1000 leveranser? (3p)

6. Ett företag som utvecklar algoritmer för handel med aktier har två sådana algoritmer, `PointBlank` och `MarginReaper 2.0`, som de vill jämföra. Jämförelsen görs genom att företaget under en timmes tid låter de två algoritmerna handla på ett antal olika börser, varefter vinsterna jämförs. Resultaten blev:

Börs:	NASDAQ	Stockholm	Euronext	TMX	KASE
`PointBlank`:	832.2	880.8	1945	1595	1202
`MarginReaper 2.0`:	62.70	-8.029	1012	996.5	829.5

   Antag att vinstsiffrorna är observationer av oberoende normalfördelade slumpvariabler och ta fram ett 99% konfidensintervall för att avgöra om det är någon signifikant skillnad mellan de två algoritmerna. (5p)

7. En viss typ av godispåsar anges innehålla i snitt minst 300g. Inför Halloween blev några husägare oroliga för att innehållet kanske var mindre än 300g och vägde 16 påsar. Man uppmätte då i snitt 295g. Konsumentombudsmannen säger att man har fog för klagomål om man kan visa på 5% signifikansnivå att innehållet är för lite.

   Antag att vikterna är normalfördelade med väntevärde μ och standardavvikelse 15g. Testa om husägarna har fog för klagomål. Bestäm även testets styrka i $\mu = 290$. (6p)

8. En föreslagen modell för antal böcker som besökare till bokmässan köper är att det är fördelat enligt $\text{Bin}(6, p)$. För att utvärdera detta gjordes en undersökning på 1000 slumpmässigt utvalda besökare, med resultaten:

Antal böcker:	0	1	2	3	4	5	6
Antal kunder:	10	75	225	431	190	62	7

   (a) Testa modellen på 5% signifikansnivå om p sätts till 0.5. (4p)

   (b) Skatta p ur den givna tabellen. (2p)