TENTAMEN 2019-01-08 | Examinator:
Sannolikhetsteori och statistik TMS137 | J. Björnberg

Tentamen består av 8 uppgifter om totalt 50 poäng. För betygen 3, 4 resp. 5 krävs minst 20, 30 resp. 40 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng. Lösningarna skall vara väl motiverade.

Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare; boken *Sannolikhetsteori och statistik* av Blom et al, alternativt *Stokastik* av Alm & Britton; samt ett egenhändigt handskrivet formelblad på maximalt en A4-sida (dvs en sida av ett A4-blad).
Boken får inte innehålla egna anteckningar. **Lycka till!**

1. En politiker skriver 9st slumpmässigt valda bokstäver på twitter. Bokstäverna väljs från A till Z (26st), utan repetitioner. Beräkna sannolikheten att
   (a) ordet SAD förekommer bland bokstäverna. (3p)
   (b) bokstäverna S, A, och D alla förekommer, i någon ordning. (3p)

2. På en gata finns 6st parkeringsfickor i rad. En kväll ska 3 av ledamöterna i Svenska Akademin ut på krog och vill parkera varsin limousin på gatan. Limousinerna tar upp 2st platser var, och alla 6 platser är till en början lediga. Första limousinen ställer sig på 2st slumpmässigt valda platser, och andra limousinen på 2st slumpmässigt valda bland de återstående platserna. Beräkna följande sannolikheter.
   (a) Att den tredje limousinen får plats. (2p)
   (b) Att den *andra* limousinen står på de två platserna längst fram. (2p)
   (c) Att den tredje limousinen får plats, *givet* att den *andra* limousinen står på de två platserna längst fram. (2p)
   (d) Att den andra står längst fram, givet att den tredje får plats. (2p)

3. Slumpvariablerna X och Y är oberoende, med täthetsfunktioner $f_X(t)$ respektive $f_Y(t)$ där
$$f_X(t) = \begin{cases} 2t, & \text{om } 0 < t \leq 1, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases} \qquad f_Y(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } 0 < t \leq 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$
   Bestäm uttrycken $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ samt $d(t)$ sådana att summan $X+Y$ har täthetsfunktion
$$f_{X+Y}(t) = \begin{cases} a(t), & \text{om } t \leq 0, \\ b(t), & \text{om } 0 < t \leq 1, \\ c(t), & \text{om } 1 < t \leq 2, \\ d(t), & \text{om } t > 2. \end{cases}$$
   (6p)

4. En diskret tvådimensionell slumpvariabel har sannolikhetsfunktion $p_{X,Y}(j,k)$ enligt tabellen nedan.

$p_{X,Y}(j,k)$	$k:1$	2	3	4
$j:1$	0.06	0.01	0.1	0.03
2	0.09	0.09	0.1	0.02
3	0.15	0.1	0.2	0.05

Fortsättning på nästa sida →

(a) Beräkna marginalfördelningarnas sannolikhetsfunktioner, $p_X(j)$ och $p_Y(k)$. (2p)

(b) Beräkna den betingade sannolikhetsfunktionen $p_{X|Y=3}(j)$. (1p)

(c) Är X och Y oberoende? Motivera. (1p)

(d) Beräkna väntevärdet $E[\max(X, Y)]$. (1p)

5. Vid inköp i en dagligvaruhandel sker en öresavrundning (uppåt eller nedåt) vilken modelleras som en $\mathrm{U}(-0.5, 0.5)$-fördelad slumpvariabel.

(a) Vid 10 oberoende inköp, vad är sannolikheten att avrundningens storlek var större än 0.3 vid exakt 5 av inköpen? (2p)

(b) Vid 100 oberoende inköp, vad är approximativt sannolikheten att avrundningens storlek var större än 0.3 vid minst 50 av inköpen? (2p)

(c) Vid 100 oberoende inköp, vad är approximativt sannolikheten att avrundningens storlek var större än 0.49 vid exakt 5 av inköpen? (2p)

6. Följande mätvärden kan antas vara oberoende observationer av en normalfördelad storhet med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2:

$$-1.78, \quad 0.27, \quad -1.31, \quad -0.61, \quad -1.47, \quad -1.45, \quad -0.87.$$

Ta fram följande konfidensintervall med konfidensgrad 95%:

(a) Ett ensidigt övre begränsat konfidensintervall för μ. (3p)

(b) Ett ensidigt övre begränsat konfidensintervall för σ. (2p)

7. På en viss vägsträcka misstänks att det är vanligt att bilar kör för fort. I en preliminär studie mäts farten på $n = 60$ bilar som passerar. Mätningarna kan anses oberoende. Vi låter p beteckna den andel som kör för fort bland alla bilar som kör sträckan. Man anser att det är värt att gå vidare i undersökningen om man kan visa att $p > p_0 = 0.5$, och väljer som nollhypotes H_0: $p = p_0$.

(a) Vad är lämplig mothypotes H_1? (1p)

(b) Betrakta testvariabeln $Z_0 = (\overline{X} - p_0)/\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$, där $\overline{X}$ är andel bilar i urvalet som kör för fort. Om H_0 stämmer, approximativt vilken fördelning har Z_0? Ange vilken approximationssats som används. (2p)

(c) Resultatet av mätningen blev att 36 av bilarna körde för fort. Använd Z_0 för att beräkna testets P-värde. (1p)

Antag nu att det sanna värdet på p är $p = p_1 = 0.6$.

(d) Vad är då approximativ fördelning hos $Z_1 = (\overline{X} - p_1)/\sqrt{p_1(1-p_1)/n}$? (1p)

(e) Skriv Z_0 i termer av Z_1. Approximativt vilken fördelning har Z_0? (2p)

(f) Om signifikansnivån sätts till $\alpha = 0.05$, vad är testes styrka? (2p)

8. Följande data är observationer av storheter x och y som tros följa ett samband av formen $y = \alpha + \beta x$:

x:	14.1	17.5	20.9	24.3	27.7	31.1
y:	8.41	9.24	10.45	11.42	12.20	13.51

(a) Skatta α och β samt y-värdet när $x = 25$. (3p)

(b) Beräkna ett konfidensintervall med konfidensgrad 95% för β. (2p)