**Hemuppgifter:**

1. Mängden $A$ är dubbelt så sannolik som $B$. Hur förhåller sig $\mathrm{P}(A|B)$ till $\mathrm{P}(B|A)$?

2. Två händelser $A$ och $B$ har sannolikheter skilda från noll.

   (a) $A$ och $B$ är disjunkta. Kan $A$ och $B$ vara oberoende?

   (b) $A$ och $B$ är oberoende. Kan $A$ och $B$ vara disjunkta?

3. Sannolikheten för att en satellit träffas av en meteorit under ett varv runt jorden är 0.025. Låt $X$ vara antalet träffar efter 100 varv.

   (a) Vad har $X$ för fördelning?

   (b) Beräkna $\mathrm{P}(X \geq 4)$

   (c) Låt $Y$ vara antal varv tills detta inträffar för första gången. Beräkna $\mathbf{E}[Y]$.

4. Låt $A$ och $B$ vara två händelser. Visa att (t.ex. med hjälp av Venn-diagram)

   (a) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$,

   (b) $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$.

5. I genomet för *Mus musculus* (husmus) finns det ungefär 24000 gener och av dessa har 3000 ingen känd funktion. Antag att vi väljer 1000 av de 24000 generna på måfå och låter $X$="antalet valda gener utan känd funktion". Vad har $X$ för fördelning?

6. Antag att $X \sim Geo(1/2)$. Rita $F_X$.

7. Låt $X$ vara en stokastisk variabel med $f_X(x) = 3x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$. Beräkna $F_X$.

8. Låt $X$ vara en stokastisk variabel och $a$ och $b$ vara tal där $a > 0$.

   (a) Använd definitionen för väntevärde och visa att $\mathrm{E}[aX + b] = a\,\mathrm{E}[X] + b$.

(b) Använd definitionen för varians och $(a)$ för att visa att $\mathrm{Var}[aX+b] = a^2 \,\mathrm{Var}[X]$.

9. Visa att $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$.

10. Låt $X$ och $Y$ vara två kontinuerliga oberoende stokastiska variabler med täthetsfunktioner $f_X(x)$ och $f_Y(y)$. Visa att $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$.

11. En tillverkare av bildäck tänker lansera en ny typ av radialdäck. Genom mätningar har man kommit fram till att livslängder (miles) beskrivs av normalfördelade stokastiska variabler med parametrarna $\mu$=36500 och $\sigma$=5000. Man vill kunna garantera en livlängd $L$ i miles. Hur ska man välja $L$ om man vill att 90% av däcken ska "överleva" garantinivån?

12. Antag att den stokastiska variablen $X$ har följande täthetsfunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta},\ x > 0$$

med parametrarna $\beta$=1 och $\alpha$=2. Beräkna $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3)$. För $\alpha$ heltal gäller att $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$.

13. Visa att sannolikheten för att *exakt* en av händelserna $A$ och $B$ inträffar är $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\,\mathrm{P}(A \cap B)$.

14. Den stokastiska variabeln $X$ kan bara anta värdena 3, 4, 7, 8 och 9. Man känner följande värden på sannolikhetsfunktionen:

$$p_X(3) = 1/3,\ p_X(4) = 1/4,\ p_X(7) = 1/6,\ p_X(8) = 1/6.$$

Beräkna

(a) $p_X(9)$,

(b) $F_X(5)$,

(c) $\mathrm{P}(4 \leq X \leq 8)$ och $\mathrm{P}(X \geq 8)$.

15. Låt den tvådimensionella diskreta stokastiska variabeln $(X, Y)$ ha sannolikhetsfunktionen

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{x^2+y^2}{32},\ \text{för } x = 0,1,2,3 \text{ och } y = 0,1.$$

Beräkna $\mathrm{E}\,[X]$.

16. Linus och Linnéa har i en världsberämd lustträdgård plockat sju frukter av aptitligt utseende. De är lyckligt ovetande om att tre av frukterna är giftiga. Om Linus sätter i sig fyra frukter på måfå och Linnéa de återstående tre, hur stor är sannolikheten för att båda blir förgiftade?

17. $(X, Y)$ har täthetsfunktionen

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{om } 0 < x < y \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

   (a) Bestäm de marginella täthetsfunktionerna för $X$ och $Y$.

   (b) Beräkna $P(X > 2|Y < 4)$

   (c) Är $X$ och $Y$ oberoende?

18. Tennisspelarna Linus och Linnéa skall spela en match mot varandra. Händelsen att Linnéa vinner ett set är oberoende av utgången av tidigare set och sannolikheten för detta är 0.6. Matchen slutar när en av spelarna har vunnit tre set. Låt $X$ vara det totala antalet set i matchen. Beräkna

   (a) $p_X(x)$,

   (b) $\mathrm{E}[X]$.