Sannolikhetsteori

Föreläsning 3

Repetition:

- Kombinatorik
  - Dragning med återläggning
  - Dragning utan återläggning *med* ordning
  - Dragning utan återläggning *utan* ordning
  - Multiplikationsprincipen
- Betingade sannolikheter
- Satsen om total sannolikhet

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Bayes Sats (s. 72)

1. För två händelser A och B gäller

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

2. För B och disjunkta H_i

$$P(H_i \mid B) = \frac{P(H_i)P(B \mid H_i)}{\sum_j P(H_j)P(B \mid H_j)}$$

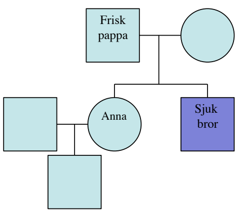
Exempel (vänsterhänthet):

- Givet att en slumpmässigt vald person är vänsterhänt, vad är sannolikheten att personen är en man?

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Exempel: Blödarsjuka

- Ärvs via X-kromosomen
- Risken att en son blir sjuk är 50 % om modern är bärare
- Om fadern är frisk och modern bärare är dottern bärare med 50% sannolikhet.
- Om Annas bror har blödarsjuka vad är sannolikheten att hon är bärare?
- Om Annas första barn är en frisk son, vad är då sannolikheten att hon är bärare av sjukdomen?



Oberoende händelser (s. 83 (76))

Definition:

Händelserna A och B är oberoende om och endast om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Obs!

- Oberoende och disjunkt helt olika begrepp!
- Disjunkta händelser är beroende!

Definition:

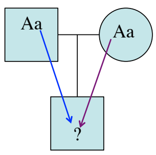
Händelserna A, B och C är oberoende om och endast om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Se s. 85 (79)

Exempel: Transmission av alleler

- A={mamman transmitterar A}, B={pappan transmitterar a}, C={Barnet får genotyp Aa}
- Oberoende?



$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(C \mid A) = ?$$
$$P(C \mid B) = ?$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(C \mid A \cap B)P(A \cap B)$$

Stokastiska Variabler

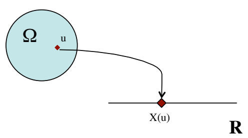
Ex: Antal pojkar bland tre barn

X=antal pojkar

Möjliga värden: 0,1,2,3

X är en stokastisk variabel

Definition:
En *stokastisk variabel* (s.v) är en reellvärd funktion definierad på ett utfallsrum.



Diskreta Stokastiska Variabler

- Uppräkneligt antal värden
- Exempel
  - Y=Antal personer som får en biverkning i en medicinsk studie
  - Slå en tärning tills vi får en 6a.

  X=antal slag som behövs
  - …

Definition:

Sannolikhetsfunktionen för en diskret s.v.

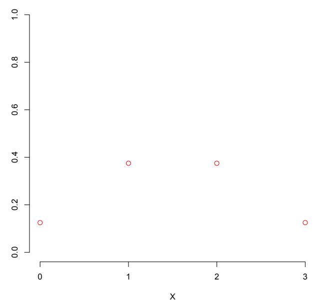
$$p_X(x) = P(X = x)$$

(eng. probability distribution, Probability mass function,pmf)

Exempel

- P(pojke)=0.5
- Oberoende

$$p_X(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{8}, & x=0 \\ \frac{3}{8}, & x=1 \\ \frac{3}{8}, & x=2 \\ \frac{1}{8}, & x=3 \end{Bmatrix}$$



Total sannolikhet

- Om s.v. **X** antar värden i χ ={x_1, x_2, …}

$$\sum_{x \in \chi} p_X(x) = 1$$

- Om A delmängd av χ :

$$P(A) = \sum_{x \in A} p_X(x)$$

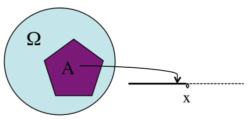
Fördelningsfunktion

- Definition: *Fördelnings-funktionen* för **X**

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{y \le x} p_X(y)$$

$$\forall x \in \Re$$

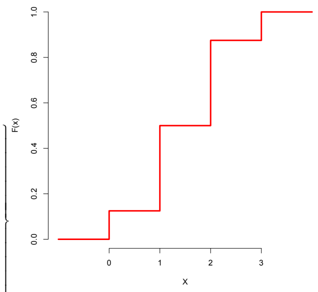
(cumulative distribution function, cdf)



Exempel fördelningsfunktion

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0 \\ \frac{3}{8}, & x = 1 \\ \frac{3}{8}, & x = 2 \\ \frac{1}{8}, & x = 3 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Egenskaper för fördelningsfunktionen $F_X(x)$

1. Vi har att $\begin{array}{ll} F_X(x) \to 0, & x \to -\infty \\ F_X(x) \to 1, & x \to +\infty \end{array}$
2. $F_X(x)$ är en ökande funtion av x
3. $F_X(x)$ är högerkontinuerlig
4. För a ≤ b gäller

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

5. $\left[F_X(X) = \sum_{k=-\infty}^{X} p_X(k) \right]$ Är en stokastisk variabel