CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Sannolikhetsteori
Föreläsning 4

Repetition:

- Diskreta Stokastiska Variabler (s.v.)
  - Reellvärd funktion definierad på ett utfallsrum
- Sannolikhetsfunktion, p(x)= P(X = x)

$$\sum_x p_X(x) = 1 \qquad P(X \in A) = \sum_{x \in A} p_X(x)$$

- Fördelningsfunktion, F(x) = P(X ≤ x)

$$P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Diskreta fördelningar

Fördelning: hur X beter sig sannolikhetsmässigt.

1. Bernoulli-fördelning
   - X=1 om en viss händelse inträffar
   - X~Be(p)
   - Sannolikhetsfunktion:

$$p_X(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1-p & x = 0 \end{cases}$$

Exempel:

a) Singla slant,
   - X=antal krona

b) DNA-sekvensering
   - P(fel)=0.01
   - Y_i=bas i är fel

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Likformig fördelning

- Alla värden är lika sannolika
- X~Uni(m)
- Sannolikhetsfunktion:

$$p_X(x) = \frac{1}{m}$$

Exempel:

a) Kast med (balanserad) tärning,
   - X=värdet som tärningen visar

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Binomialfördelning

- Räkna antalet 'lyckade' försök, oberoende upprepning
- Upprepade Bernoulli-försök
- X~Bin(n, p)
- Sannolikhetsfunktion:

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Exempel:

a) Kast med 5 mynt,
- X=antal krona

b) Pojkar bland tre barn
- Y=antal pojkar
- Y~Bin(3, 0.5)

c) DNA-sekvensering
- Z=antal fel i en sekvens av längd 100 bp
- Beräkna:
  1. P(Z = 0)
  2. P(Z ≥ 2)

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

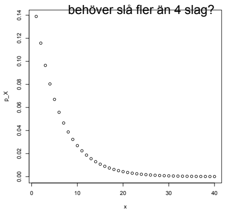
Geometrisk fördelning

- Räkna antalet försök som krävs för att observera ett 'lyckat' försök, oberoende upprepning
- Oändligt antal möjliga värden
- X~Geo(p)
- Sannolikhetsfunktion:

$$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p$$

Exempel:

a) Slå en tärning tills vi får en 6a,
- X=antal slag som krävs
- Vad är sannolikheten att du behöver slå fler än 4 slag?



CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Hypergeometrisk fördelning

- Dragning utan återläggning
- Två olika kategorier
- X~Hyp(n, M, N)
- Sannolikhetsfunktion:

$$p_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Exempel:

a) Uppgift 2.39
- X=antal mobiltelefoner bland de 5 första
- Vad blir n, M, N för detta fall?
- Vad är sannolikheten att minst 3 av de 5 första är mobiltelefoner?

Poisson-fördelning

- Antal gånger en händelse inträffar under en viss tid.
- Intensitet λ
- X~Poi(λ)
- Sannolikhetsfunktion:

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2,...$$

Exempel:

a) Telefonväxel
   - X=antal telefonsamtal

b) Besökare i en butik
   - Y=antal besökare under 30 min

c) Akutmottagning:
   - Patienter anländer med intensitet 7 personer/timme
   - Z=antal patienter under en timme
   - Vad är sannolikheten att minst 4 personer anländer under en specifik timme?

Kontinuerliga Stokastiska Variabler

Kan anta alla värden i ett eller flera intervall (ändligt/oändligt)

Definition:
X är en stokastisk variabel. Om det finns en funktion f_X s.a.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \forall x$$

X kontinuerlig s.v. med täthetsfunktion (pdf) f_X.

Sats (s. 146):

$$f_X'(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = f_X(x)$$

I alla punkter där f_X är kontinuerlig.

Sats: Om X är en kontinuerlig s.v. så gäller att

$$P(X = c) = 0, \forall c$$

Följdsats:

$$P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$
$$= P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$