CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Sannolikhetsteori
Föreläsning 5

Repetition:

- Bernoulli/Binomial-fördelning $p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
- Likformig Fördelning
- Geometrisk/Negativ binomial-fördelning $p_X(x) = (1-p)^{x-1} p$
- Hypergeometrisk fördening
- Poisson-fördelning

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Kontinuerliga Stokastiska Variabler

Kan anta alla värden i ett eller flera intervall (ändligt/oändligt)

Definition:

X är en stokastisk variabel. Om det finns en funktion f_X s.a.

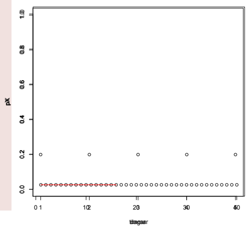
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \forall x$$

X kontinuerlig s.v. med täthetsfunktion (pdf) f_X.

Exempel: Brandövning

X ~ Uni(5),

- Vad är sannolikheten att den inträffar måndag eller tisdag?



CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Kontinuerliga S.V. forts.

Sats (s. 146):

$$f_X'(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = f_X(x)$$

där f_X är kontinuerlig.

Sats: Om X är en kontinuerlig s.v. så gäller att

$$P(X = c) = 0, \forall c$$

Följdsats: Om X kontinuerlig s.v.

$$P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$
$$= P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

Likformig fördelning

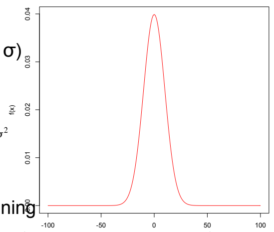
- Alla värden är lika sannolika
- X~Uni(a,b)
- Täthetsfunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & annars \end{cases}$$

Exempel spårvagn:

- Spårvagnen går var 10e minut.
- En person anländer vid en slumpmässig tidpunkt
- X=väntetid (min)
- X~Uni(0,10)

Normalfördelning



- X~N(μ, σ^2) eller N(μ, σ)
- Täthetsfunktion:

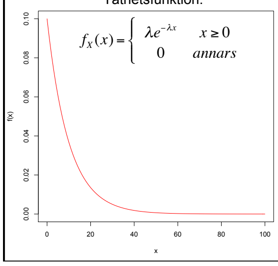
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

- Även Gaussisk fördelning
- Viktig fördelning med många användningsområden

Exponentialfördelning

- X~Exp(λ)
- Täthetsfunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & annars \end{cases}$$



Exempel: Fördelningen saknar minne

- X=livslängd för en transistor
- X~Exp(λ)
- Vad är

$$P(X > a + b \mid X > a)$$

Gammafördelningen

- X~Gamma(α, β) alt Γ(α, β)
- Täthetsfunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & annars \end{cases}$$

- α > 0, β > 0

Övning:

Visa att Exponential-fördelningen är ett specialfall av gammafördelningen med α=1 och β=1/λ.

Väntevärden

Def:

$$E[x] = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) & diskret \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx & kontinuerlig \end{cases}$$

Exempel:
- Sexsidig tärning
- exponentialfördelning

- Förväntat värde av X
- Betecknas ofta med μ

Den lata statistikerns sats(s. 149)
g en godtycklig funktion,

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot p_X(x) & diskret \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx & kontinuerlig \end{cases}$$

Andra lägesmått

Median
Def:

$$F_X(\tilde{m}) = \tfrac{1}{2}$$

- Delar sannolikhetsmassan i två lika stora delar
- Inte alltid entydig
- Sammanfaller med väntevärdet om fördelningen är symmetrisk (ex. Likformig förd.)

Mod = maxpunkt på täthetsfunktionen

Ex: Poissonfördelning