CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Sannolikhetsteori

Föreläsning 6

Stokastiska Variabler
Sannolikhetsfördelningar

Diskreta förd.

- $p_X(x)=P(X=x)$
- Likformig, $p_X(x)=1/m$
- Binomial, $p_X(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$
- Poisson, $p_X(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$
- Geometrisk, $p_X(x)=(1-p)^{x-1}p$
- Hypergeom $p_X(x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

Kontinuerliga förd.

- Täthetsfunktion $f_X(x)$
- Likformig $f_X(x)=\frac{1}{b-a}$
- Normalförd. $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
- Exponentialförd. $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}$
- Gammafördelning, $f_X(x)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}$

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Varians och standardavvikelse

Definition:
Variansen för en s.v. X är

$$V(X)=E\left[(X-E[X])^2\right]$$

Betecknas även σ^2, Var(X).

- Spridningsmått
- Genomsnittlig kvadratisk avvikelse från väntevärdet

Beräknas med:

$$V(X)=\begin{cases}\sum_x (x-E[X])^2\,p_X(x)\\ \int_x (x-E[X])^2\,f_X(x)\,dx\end{cases}$$

Definition:
Standardavvikelsen för en s.v. X är

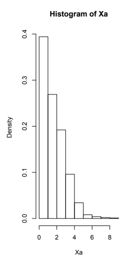
$$SD(X)=\sqrt{V(X)}$$

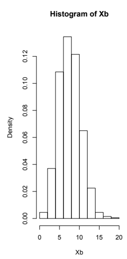
Betecknas ofta σ.

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Exempel: Frevens av en bakterie

- A: 2 % av populationen
- B: 8 % av populationen
- X_i = antal individer som har bakterien bland 100 ifrån pop. *i*
- Hur stor varians?
  - Vilken får störst varians?





Varians

Sats (s. 150):

$$V(X) = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2$$

(extrauppgift 9)

Härled V(X) om X~Exp(λ)

Sats: (linjär transformation)

$$E\left[aX+b\right] = aE\left[X\right]+b$$

(extrauppgift 8)

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Normalfördelning (Gaussisk fördelning)

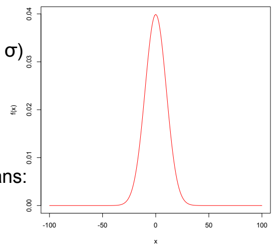
- X~N(μ, σ^2) eller N(μ, σ)
- Täthetsfunktion:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

- Väntevärde och varians:

$$E[X] = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$



Normalfördelning forts.

- Standardiserad Normalförd.:

$$\mu = 0, \sigma = 1$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Fördelningsfunktion:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

- Beräknas numeriskt (se tabell A.3)
- Exempel: X~N(0,1), P(-1 < X ≤ 2)?

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Icke-standardiserade Normalfördelningar? S 157

Sats : Om X~N(μ, σ^2) och Y=aX+b så är

$$Y \sim N\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$$

Följdsats: (standardiserad normalfördelning)
Om X~N(μ, σ^2) och Z=(X-μ)/σ, så är

$$Z \sim N(0,1)$$

Exempel : Om X~N(5, 9), vad är då P(3<X≤6)?

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Kvantiler och percentiler

- α-kvantil: Låt 0<α<1,
  x=x_α löser ekvationen

$$F_X(x) = 1 - \alpha$$

Se tabeller för t- och X^2–fördelning

- Percentil:

$$F_X(\eta(p)) = p$$

Se t.ex tabell för normalförd.

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Flerdimensionella Stokastiska variabler

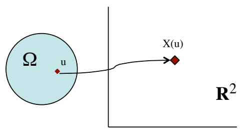
Def: En två-dimensionell s.v. är en funktion från Ω till $\mathbf{R}^2$.

Ett slumpförsök där två saker mäts

Def: Fördelningsfunktionen för (X,Y) är

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

(simultan förd. funktion)



Tvådimensionella s.v.

Diskret:

- Simultan sannolikhets-funktion:

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$
$$p_{X,Y}(x,y) \geq 0$$
$$\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x,y) = 1$$

- Marginell fördelning:

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$$

Motsvarande för Y

Kontinuerlig:

- Def: (X,Y) är en två-dimensionell s.v. om det finns en funktion $f_{X,Y}(x,y)$ s.a.

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds$$
$$f_{X,Y}(x,y) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds = 1$$

- Marginell fördelning

$$f_X(x) = \int_y f_{X,Y}(x,y)$$

Oberoende

Definition : X och Y kallas oberoende om

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$
$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$