Sannolikhetsteori

Föreläsning 7

Repetition:

-Varians:

$$V(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2\right] - E[X]^2$$

$$V(X) = \begin{cases} \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x) \\ \int_x (x - E[X])^2 f_X(x)\,dx \end{cases}$$

-Standardavvikelse:

$$SD(X) = \sqrt{V(X)} = \sigma$$

$$E\left[aX + b\right] = aE\left[X\right] + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

-Normalfördelning

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt \qquad X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Repetition: Flerdimensionella Stokastiska Variabler

Ett slumpförsök där två saker mäts

Simultan fördelningsfunktionen för (X,Y) är

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

Simultan sannolikhetsfunktion:

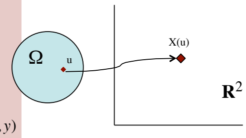
$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

Simultan täthetsfunktion $f_{X,Y}(x,y)$:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$$

Marginell fördelning

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y) \qquad f_X(x) = \int_y f_{X,Y}(x,y)$$



CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Väntevärden och beroendemått

Definition : X och Y kallas oberoende om

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

För alla x och y, annars är X och Y beroende

Definition : Låt (X,Y) vara en tvådimensionell s.v. och Z=h (X,Y), där $h : \Re^2 \to \Re$

Då är

$$E[Z] = E\left[h(X,Y)\right] = \begin{cases} \sum_x \sum_y h(x,y)\,p_{X,Y}(x,y) \\ \int_x \int_y h(x,y)\,f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Kovarians

Exempel på funktioner h:
1. E[XY]
2. E[X+Y]=E[X]+E[Y]

Definition: Låt X och Y vara två s.v. med

$$\mu_X = E[X], \mu_Y = E[Y]$$

Kovariansen mellan X och Y

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$Cov(X,X) = V(X)$$

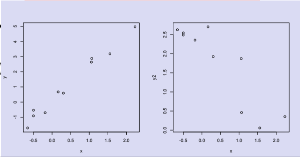
Sats: Om X och Y är två oberoende s.v. så gäller att

$$E[XY] = E[X]\cdot E[Y]$$

Se Extraövning 10

Sats:

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]\cdot E[Y]$$



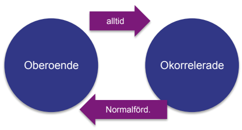
CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Korrelation

Definition: $\rho_{X,Y} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Kallas *korrelations-koefficienten* för X och Y.

Definition: Om Cov(X,Y)=0 så kallas X och Y *okorrelerade*



CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Stora Talens Lag

Exempel: Kasta en tärning många gånger,
- X_1, X_2, X_3, ... De observerade talen vid resp. slag
- Vad händer med $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ för stora n?

Stora Talens Lag: Låt X_1, X_2, X_3, ... vara oberoende likafördelade s.v. med

$$E[X_i] < \infty, V(X_i) = \sigma^2 < \infty$$

Då gäller för godtyckligt $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\mu - \varepsilon < \bar{X}_n < \mu + \varepsilon\right) \to 1, n \to \infty$$

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Fördelning för $\bar{X}_n$

$$E\left[\bar{X}_n\right] = \mu$$
$$V\left(\bar{X}_n\right) = \sigma^2 / n$$

$$V\left(\bar{X}_n\right) \to 0, n \to \infty$$

Exempel: Ett litet lab ska köpa in mikroskåplampor. De väljer från två leverantörer:

- Typ I: genomsnittlig livslängd 28 dagar, 50 lampor/förp
- Typ II: genomsnittlig livslängd 7 dagar, 175 lampor/förp

Antag att livslängderna är Exp-fördelade. Vilket typ bör väljas om lamporna ska räcka till ett års förbrukning för 3 mikroskåp?

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Centrala Gränsvärdessatsen

Exempel: tärningskast

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n,$ $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Hur ser fördelningen för Y ut?

Binomial-fördelning:

Tumregel: om np≥10 och np (1-p)≥10 kan normal-approximation användas

Sats: Låt $X_1, X_2, X_3, \ldots$ vara oberoende likafördelade s.v. med

$$E[X_i] < \infty, V(X_i) = \sigma^2 < \infty$$

Om n är stort gäller approximativt att

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

Ekvivalent: $\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \sigma^2 / n\right)$