CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Sannolikhetsteori

Föreläsning 8

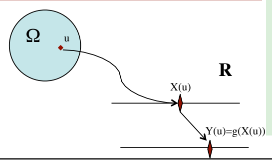
Repetition:

- Oberoende: $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- Kovarians: $Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[XY] - E[X]E[Y]$
- Korrelation: $\rho_{X,Y} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
- Stora Talens Lag: $X_1, X_2, X_3, \ldots$ oberoende likafördelade s.v. m. ändligt μ och σ^2. $P\left(\mu - \varepsilon < \overline{X}_n < \mu + \varepsilon\right) \to 1,\quad n \to \infty$
- Centrala Gränsvärdessatsen: $X_1, X_2, X_3, \ldots$ oberoende likafördelade s.v. m. ändligt μ och σ^2. Då gäller approximativt (om n ≥ 25-30): $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Funktioner av Stokastiska Variabler

1. Funktion av <u>en</u> stokastisk variabel
   i. Vilka värden kan den nya variabeln anta?
   ii. Om X diskret, bestäm sannol.fkn, om X kontinuerlig: bestäm $F_Y(y)$, derivera: $f_Y(y)=F_Y'(y)$



Exempel 1:

X	0	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

Låt $Y=X^2-3X+2$, vad är $p_Y(y)$?

i. Möjliga värden?

ii. Sannolikhetsfunktion?

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Exempel 2

Låt X~Uni(0,1). Vilken fördelning har $Y=e^X$?

i. Möjliga värden?

ii. Sannolikhetsfunktion?

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

2. Summor av stokastiska variabler
   i. Aritmetiskt medelvärde
   ii. CGS – vi kan approximera fördelningen för $\sum_{i=1} X_i$
   iii. Om varje X_i är oberoende.
   iv. En linjärkombination av oberoende Normalfördelade s.v. är Normalfördelad.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i + b \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i + b, \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2\right)$$

3. Minimum och maximum
   i. Max: två oberoende s.v. X_1 och X_2. Vilken för-delning har $Z=\max(X_1, X_2)$?

$$F_Z(z) = F_{X_1}(z) F_{X_2}(z)$$

   ii. Min: fördelning för $Z=\min(X_1, X_2)$?

$$F_Z(z) = 1 - \left(1 - F_{X_1}(z)\right)\left(1 - F_{X_2}(z)\right)$$

CHALMERS | UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Exempel:
1. Tid tills mutation inträffar I en population
2. Spårvagnar, X~Uni(0,10), Y~Uni(0,10) är oberoende, Z=min(X,Y)
   a. $F_Z(z)$
   b. Förväntad väntetid vid hållplatsen, E[Z]
   c. Hur mycket kortare blir den förväntade tiden när det går 2 vagnar istället för en?