Facit till tentamen 2007-12-18 TMS145

1. a) $Y_1 \sim Uni(-1,1)$

$E(Y_1) = 0$

$Var(Y_1) = \frac{1}{3}$

$E(Y_1^3) = \int_{-1}^{1} y^3 \cdot \frac{1}{2}\, dx = 0$

$$\gamma = \frac{0 - 3 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} - 0^3}{(\sqrt{1/3})^3} = 0$$

(Symmetrisk fördelning!)

b) $f_{Y_2}(y) = \frac{1}{2}(1+y) \qquad -1<y<1$

$E(Y_2) = 1/3$

$E(Y_2^2) = 1/3$

$\Rightarrow Var(Y_2) = E(Y_2^2) - [E(Y_2)]^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$

$E(Y_2^3) = 1/5$

$$\gamma = \frac{1/5 - 3 \cdot 1/3 \cdot 2/9 - (1/3)^3}{\left(\sqrt{\frac{2}{9}}\right)^3} = -0.566$$

2. a) X = antal godkända bland de utvalda

$X \sim Hyp(5, 6, 10)$

$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) =$

$$= \frac{\binom{6}{4}\binom{4}{1}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{6}{5}\binom{4}{0}}{\binom{10}{5}} \approx 0.262$$

b) X = antal godkända studenter

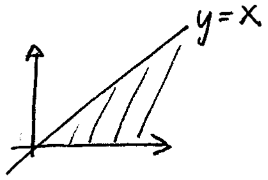
$X \sim Bin(1000, 0.6)$ appr $N(600, 240)$

$$P(X \geq 625) = P\left(\frac{X-600}{\sqrt{240}} \geq \frac{625-600}{\sqrt{240}} \right)$$

$$= 1 - \Phi(1.61) = 1 - 0.9463 = 0.0537$$

3. X, Y livslängder

$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x}, \quad 0 < y < x$



a) $f_X(x) = \int_0^x e^{-x} dy = \left[y e^{-x} \right]_0^x = x \cdot e^{-x}, \quad x > 0$

$f_Y(y) = \int_y^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_y^\infty = e^{-y}, \quad y > 0$

Vi har $f_X(x) \cdot f_Y(y) = x \cdot e^{-x} \cdot e^{-y} \neq e^{-x} = f_{X,Y}(x,y)$

$\therefore$ Ej oberoende

b) $P(X > 1 \mid Y > 1) = 1$

eftersom vi har definierat att $x > y$!

4. $x_1, \dots, x_8$ obs av $X_1, \dots, X_8$ där $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\hat{\mu} = \bar{x} = 1.0125$

$\hat{\sigma} = s = 0.341$

a) $H_0: \mu = 0.6$

$H_1: \mu > 0.6$

$$u = \frac{\bar{x} - 0.6}{s / \sqrt{8}} = 3.42$$

H_0 förkastas om $u > c$ där $c = 2.998$ ur $t(7)$-tabell.

H_0 förkastas. Varningsskylt ska sättas upp.

b) $H_0: \mu = 0.8$

$H_1: \mu > 0.8$

$$u = \frac{\bar{x} - 0.8}{s/\sqrt{8}} = 1.76$$

Samma krit. gräns som i a).

H_1 kan inte förkastas. Verkar inte finnas någon anledning att införa badförbud.

5. a) $x = 72$ obs av $X \sim Bin(160, p_1)$

$y = 91$ obs av $Y \sim Bin(160, p_2)$

p_1: slh att döma skyldig vid trevligt utseende

p_2: —"— otrevligt utseende

$H_0: p_1 = p_2$

$H_1: p_1 \neq p_2$

Undersöks gm tex ett tvåsidigt konf. intervall för $p_2 - p_1$.

$\hat{p}_1 = 0.45$

$\hat{p}_2 = 0.56875$

Hjälpvar: $$\frac{p_2^* - p_1^* - (p_2 - p_1)}{\sqrt{\frac{p_2^*(1-p_2^*)}{160} + \frac{p_1^*(1-p_1^*)}{160}}} \text{ appr } N(0,1)$$

$$I_{p_2 - p_1} = \left(\hat{p}_2 - \hat{p}_1 \mp 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{160} + \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{160}}\right) \approx (0.01, 0.228)$$

Bara pos. värden. Sannol. att fälla en person med otrevligt utseende tycks vara större.

b) Om likformig fördelning sann gäller att

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$ ty t.ex. $p_1 = P(0 \le X \le 100) = \int_0^{100} \frac{1}{400}\,dx = \frac{1}{4}$

Alltså: $H_0: p_1 = \dots = p_4 = 1/4$

H_1: H_0 falsk

$$Q = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(25 - 60 \cdot 1/4)^2}{60 \cdot 1/4} + \dots + \frac{(7 - 60 \cdot 1/4)^2}{60 \cdot 1/4} =$$

$$= 12.27$$

H_0 förk. om $Q > c$ där c fås ur $\chi^2(4-1) = \chi^2(3)$-tabell. $c = 11.344$. H_0 förkastas. Likformig fördelning inte trolig.

6 a) $$L(\theta) = \theta^{x_1} \cdot (1-\theta) \cdot \dots \cdot \theta^{x_n} \cdot (1-\theta)$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-\theta)^n$$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln(\theta) + n \cdot \ln(1-\theta)$$

$$l'(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} - \frac{n}{1-\theta}$$

$$l'(\hat{\theta}) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n + \sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\bar{x}}{1 + \bar{x}} \quad \text{max.}$$

b) Regressionsmodell vid enkel linjär regression:

y_j obs av Y_j där

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + \varepsilon_j$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(y_j-\bar{y})^2}_{SS_T} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(y_j-\hat{y}_j)^2}_{SS_E} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(\hat{y}_j-\bar{y})^2}_{SS_R}$$

där $\hat{y}_j = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_j$

SS_T: total variation av y-värdena kring medelvärdet.

SS_E: variation som vi inte lyckas förklara med reg. modell

SS_R: av reg.modellen förklarad variation.

Nyttig info: $R^2 = \frac{SS_R}{SS_T}$ förklaringsgrad

$s^2 = \frac{SS_E}{n-2}$ variansskattn. i modellen.