1. X = antal anrop under 2 minuter
$X \sim Poi(10)$

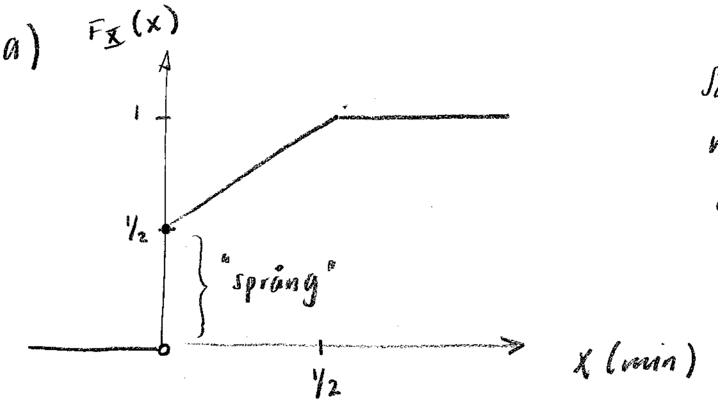
a) $P(X = 10) = \dfrac{e^{-10} \cdot 10^{10}}{10!} = 0.125$

b) Y = antal anrop under 10 minuter
$Y \sim Poi(50)$ appr $N(50, 50)$

$$P(Y \geq 60) = 1 - P(Y < 60) = 1 - P\left(\frac{Y-50}{\sqrt{50}} < \frac{60-50}{\sqrt{50}} \right)$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{50}}\right) \approx 1 - \Phi(1.41) = 1 - 0.9207 = 0.0793$$

2. X = väntetid (min)
Sökt: $F_X(x) = P(X \leq x)$

a)



Sannol. 1/2 för 0 min väntetid. Uniformt fördelat över (0, 1/2) med sannol. 1/2

b) $E(X) = \int_0^\infty P(X > x)\,dx = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]\,dx$
$$= \int_0^{1/2} 1 - \left(\frac{1}{2} + x\right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8}$$

7.5 s.

c) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$Y = X^2$ $\quad F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
$$= F_X(\sqrt{y}) - 0$$

$$E(X^2) = E(Y) = \int_0^\infty P(Y > y)\,dy = \int_0^\infty 1 - F_X(\sqrt{y})\,dy =$$

$$= \left/ \begin{matrix} y = x^2 \\ dy = 2x\,dx \end{matrix} \right/ = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]\,2x\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x\right) 2x\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{24}$$

$$V(X) = \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{5}{192} \quad [min^2]$$

$$D(X) = 0.16 \quad [min]$$

$$\approx 9.7 \quad [s]$$

3. $X \sim Bin(n,\ P(A)) \quad Y \sim Bin(n,\ P(B))$

a) Vi tittar på $Var(X+Y)$ som hjälpmedel.

$$V(\underbrace{X+Y}_{\sum_1^n I_A + \sum_1^n I_B}) = V(X) + V(Y) + 2\,Cov(X, Y)$$

indikatorvariabler för varje upprepn.

$$= \sum_1^n \underbrace{I_A + I_B}_{Z}$$

$$Z = \begin{cases} \text{utfall} & \text{sannol.} \\ 0 & 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ 1 & P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ 2 & P(A \cap B) \end{cases}$$

$$E(Z) = \ldots = P(A) + P(B)$$

$$E(Z^2) = \ldots = P(A) + P(B) + 2P(A \cap B)$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = P(A)[1 - P(A)] + P(B)[1 - P(B)] + 2P(A \cap B) - 2P(A) \cdot P(B)$$

$$Var(X + Y) = n \cdot Var(Z)$$

$$Cov(X,Y) = [Var(X+Y) - Var(X) - Var(Y)]/2$$

$$= \dots = n \cdot (P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B))$$

X - Bin
Y - Bin

Obs! Andra alternativ för beräkn. finns också.

b) $Var(Y - X) = Var(\sum_1^n \underbrace{I_B - I_A}_{Z})$

$$Z = \begin{cases} -1 & P(A) - P(A \cap B) \\ 0 & P(A \cap B) \\ 1 & P(B) - P(A \cap B) \end{cases}$$

$$E(Z) = P(B) - P(A)$$

$$E(Z^2) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$Var(Z) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) - P(B)^2 - P(A)^2 + 2P(A)\,P(B)$$

$$\therefore Var(Y - X) = n \cdot [P(A)(1 - P(A)) + P(B)(1 - P(B)) - 2P(A \cap B) + 2P(A) \cdot P(B)]$$

Alternativ: Använd a) och formel för varians för $Y - X$.

c) Indikatorvariablerna I_A och I_B blir oberoende om $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ty

$$I_A = \begin{cases} 1 & P(A) \\ 0 & 1 - P(A) \end{cases} \qquad I_B = \begin{cases} 1 & P(B) \\ 0 & 1 - P(B) \end{cases}$$

$$P(I_A = 1, I_B = 1) = P(A \cap B) \underset{\text{ober.}}{=} P(A) \cdot P(B)$$

$\vdots$

$\Rightarrow$ Alla händelser A_i, B_j $i = 1, \dots, n$ och $j = 1, \dots, n$ oberoende $\Rightarrow$ X och Y oberoende.

4. Y = livslängd hos transistor, $Y \sim Exp(\lambda)$

$f_Y(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda y}, \; y \geq 0$

X = antal transistorer som fungerar efter en tidsenhet

$X \sim Bin(400, p)$ med $p = P(Y > 1)$

Vi har en observation $x = 109$ av X.

$$p = P(Y > 1) = \int_1^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda y}\, dy = \left[-e^{-\lambda y}\right]_1^\infty =$$

$$= e^{-\lambda} \iff \lambda = \ln\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{109}{400} = 0.2725$$

a) $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{\ln(1/\hat{p})} \approx 0.77$

b) Y_{med} = median-livslängden

$$P(Y \leq y_{med}) = 0.5 \iff 0.5 = \int_0^{y_{med}} \lambda \cdot e^{-\lambda y}\, dy = \left[-e^{-\lambda y}\right]_0^{y_{med}}$$

$$= 1 - e^{-\lambda \cdot y_{med}} \iff e^{-\lambda y_{med}} = 0.5$$

$$\iff Y_{med} = -\frac{\ln(1/2)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

$$\hat{Y}_{med} = \frac{\ln(2)}{\hat{\lambda}} = \frac{\ln(2)}{\ln(1/\hat{p})} = 0.53$$

5. x = andelen körkortsinnehavare under 21 år

y = antalet dödsolyckor per 1000 körkortsinnehavare

Modell: y_j obs av $Y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + \varepsilon_j$

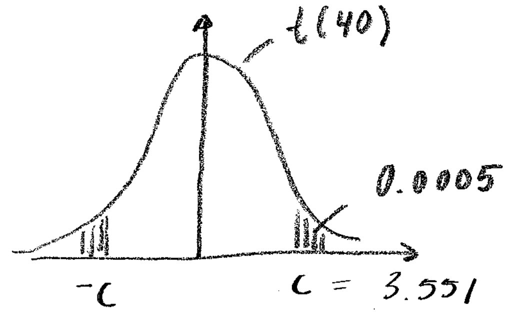
a) Vi vill pröva $H_0: \beta_1 = 0$

$H_1: \beta_1 \neq 0$

teststorhet: $t = \dfrac{\hat{\beta}_1}{s/\sqrt{S_{xx}}} = \dfrac{0.28705}{0.02939} \approx 9.77$

H_0 förkastas om $|t| > c$ där c fås ur $t(40)$-tabell

$t > c \Rightarrow H_0$ förkastas.



Det verkar troligt att andelen körkortsinnehavare under 21 år har betydelse för antalet olyckor.

b) Nej. En regressionsmodell bör inte användas utanför det område där man har observationer.

c) $R^2 = \dfrac{SS_R}{SS_T} = \dfrac{SS_R}{SS_R + SS_E} = \dfrac{33.134}{33.134 + 13.893} \approx 0.705$

6. Tio observationer $x_1, \dots, x_{10}$ från normal-fördelning.

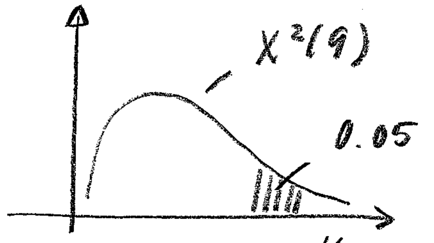
$H_0: \ \sigma = 2.5$

$H_1: \ \sigma > 2.5$ nivå 0.05

a) Teststorhet $u = \dfrac{9s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{9s^2}{2.5^2}$

u är en observation av $U \sim \chi^2(9)$ om H_0 är sann.

H_0 förkastas om $u \geq c$
där c fås ur $\chi^2(9)$-tabell eftersom



$0.05 = P(H_0 \text{ förk. om } H_0 \text{ sann})$
$= P(U \geq c)$

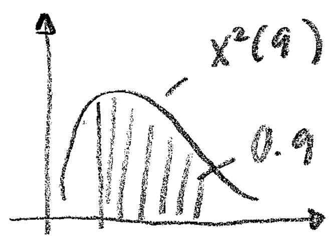
Vi har $u = \dfrac{9 \cdot 3.21^2}{2.5^2} \approx 14.84$

H_0 kan ej förkastas.

b) Styrka: $1-\beta$ (där $\beta = P(\text{typ II-fel})$)

$0.9 = P(H_0 \text{ förkastas} \mid \sigma \text{ är det sanna värdet})$
$= P(U \geq c \mid \sigma) = P\left(\dfrac{9s^2}{2.5^2} \geq c \mid \sigma\right) =$
$= P(9s^2 \geq c \cdot 2.5^2 \mid \sigma) =$
$= P\left(\underset{\uparrow}{\dfrac{9s^2}{\sigma^2}} \geq \underbrace{\dfrac{c \cdot 2.5^2}{\sigma^2}}_{a}\right)$

$\chi^2(9)$ då σ är det sanna värdet.



$a = 4.168$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\dfrac{c \cdot 2.5^2}{a}} = 5.04$