1. P('minst en flicka') =

$= 1 - P(\text{'bara pojkar'}) = 1 - \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \cdot \frac{10}{28}$

2. X_i tjocklek av bok i

$\mu = E[X_i] = 1{,}5$

$\sigma = \sqrt{Var(X_i)} = 0{,}5$

CGS ger

$T_0 = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$

$$P(T_0 \leq 80) = P\Bigg(\underbrace{\frac{T_0 - n \cdot \mu}{\sqrt{50}\,\sigma}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{80 - n \cdot \mu}{\sqrt{50}\,\sigma}\Bigg)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{80 - 50 \cdot 1{,}5}{\sqrt{50} \cdot 0{,}5}\right) = \Phi\left(\frac{5}{1/2 \cdot 5\sqrt{2}}\right) = \Phi(\sqrt{2})$$

$\approx 0{,}92$

3a $P(A|B) =$

$= P($ båda tärningarna visar 6 | båda tärningarna visar 1, 2, 3, 4, 5 eller 6)

$= 1/6$

$P(A) = P($ båda tärningarna visar 6)

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$P(A|B) \neq P(A)$ beroende!

b) $P(C|D) = P($ summan av tärningarna 7 | första tärningen 3)

$= P($ andra tärningen 4) $= 1/6$

$P(C) = P($ summan av tärningarna 7)

$= P($ tärningarna $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1))$

$= \frac{\#\text{ gynsamma utfall}}{\#\text{ möjliga utfall}} = \frac{6}{36} = 1/6$

$P(C|D) = P(C)$ oberoende!

c) Se ovan,

$P(C|D) = P(A|B) = 1/6$

4. $A = A \cap A$

Sannol

Så $P(A) = P(A \cap A)$

A oberoende av sig själv om

$P(A) = P(A) \cdot P(A)$

vilket gäller om och endast om

$P(A) = 0$ eller $P(A) = 1$.

4. Statistik

$X \sim \text{Pareto}(\theta)$

a) $E[X] = \int_1^\infty x \cdot \frac{\theta}{x^{\theta+1}} dx = \theta \int_1^\infty x^{-\theta} dx$

$= \theta \left[\frac{x^{-\theta+1}}{-\theta+1} \right]_1^\infty = \frac{\theta}{\theta-1} = \mu(\theta)$

b) Momentmetoden

$E[X] = \mu(\theta) \approx$

$\mu(\hat{\theta}) = \bar{x}$

$\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}-1} = \bar{x}$ ger $\hat{\theta} = \frac{-\bar{x}}{1-\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}-1}$

4 Stat.

c) Maximum likellhood

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i^{\theta+1}} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}$$

$$\ell(\theta) = \ln \mathcal{L}(\theta) = n \cdot \ln \theta - (\theta+1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\ell'(\hat{\theta}) = 0 \Rightarrow \frac{n}{\hat{\theta}} - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$

Maximum? $\ell''(\theta) = \frac{-n}{\theta^2} < 0$ Ja!

8.

5a) $x_1, \dots x_{16}$ obs av $X_1 \dots X_{16}$ som är ober. $N(\mu, \sigma^2)$ - fördelade.

$s^2 = 0{,}36, \quad \bar{x} = 11.1$

Finn 95% uppåt begr konfidensintervall

$$1-\alpha = 0{,}95 = P\Big(-a < \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}}_{\sim t_{n-1}}\Big)$$

$\sim t_{n-1}$ ger $a = 1{,}753$

$$= P\left(-\bar{X} - \frac{a \cdot S}{\sqrt{n}} < -\mu\right)$$

$$= P\left(\mu < \bar{X} + \frac{a \cdot S}{\sqrt{n}}\right)$$

Intervallet alltså $I_\mu = \left(-\infty, \bar{x} + \frac{a \cdot s}{\sqrt{n}}\right)$

$$= \left(-\infty, 11{,}1 + \frac{1{,}753 \cdot \sqrt{0{,}36}}{\sqrt{16}}\right)$$

$$= \left(-\infty, 11{,}1 + 1{,}753 \cdot 0{,}15\right)$$

b) $12 \notin I_\mu$, vi kan förkasta H_0 till förmån för $H_1: \mu < 12$ på $\alpha = 0{,}05$ - nivån

6. $P(A) = \theta = 1/4$ givet

$P(AA) = \theta^2 = 1/16 = p_{10}$

$P(Aa) = 2\theta(1-\theta) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = p_{20}$

$P(aa) = (1-\theta)^2 = 9/16 = p_{30}$

Observerat $n_1 = 12, \quad n_2 = 36, \quad n_3 = 32$

Testa

$H_0: p_1 = p_{10}, \quad p_2 = p_{20}, \quad p_3 = p_{30}$

H_1: H_0 inte sann

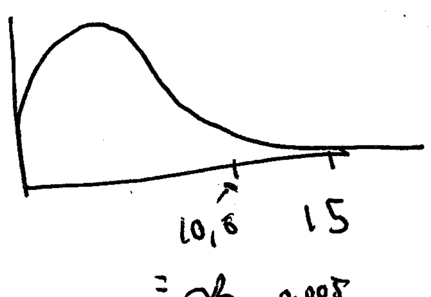
Statistika $q = \sum_{k=1}^{3} \frac{(n_i - 80 \cdot p_{i0})^2}{80 p_{i0}}$

$$= \frac{(12 - 80 \cdot \frac{1}{16})^2}{80 \cdot 1/16} + \frac{(36 - 80 \cdot 3/8)^2}{80 \cdot 3/8} + \frac{(32 - 80 \cdot 9/16)^2}{80 \cdot 9/16}$$

≈ 15

observation av $Q = \sum_{i=1}^{3} \frac{(N_i - 80 \cdot p_{i0})^2}{80 \cdot p_{i0}}$

som är $\sim \chi^2_{k-1} = \chi^2_2$ under H_0



10,8 15

$= \chi^2_{2,\, 0{,}005}$

$q = 15 > \chi^2_{2,\, 0{,}005}$

H_0 förkastas!