Lösningsförslag TMS145 15/12-09

1.) a. Tre A:n väljs på $\binom{12}{3}$ sätt, sedan väljs tre C:n på $\binom{9}{3}$ sätt, därefter tre G:n på $\binom{6}{3}$ sätt och slutligen tre T:n på $\binom{3}{3}$ sätt.

$\therefore$ Totalt $\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\binom{3}{3} = 369600$

b. Det finns $4!$ olika konfigurationer där nukleotiderna ligger intill varandra (tänk att varje trio av samma bas är en enhet)

Sannolikheten är $\dfrac{4!}{369600} \approx 6.49\cdot 10^{-5}$

2. a X_i = avstånd till bil. $X_i \sim Exp(1/100)$.

Vi har $X_1, \ldots, X_{50}$ och är intresserade av $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$ Enligt CGS gäller att

$Y \overset{appr}{\sim} N(5, 0.5)$ ty

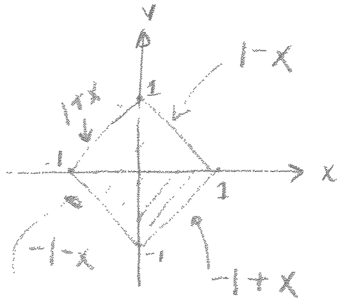
$E(Y) = \sum_{i=1}^{50} E(X_i) = 50\cdot 0.1 = 5$ km

$V(Y) \underset{\text{ober}}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{V(X_i)}_{\frac{1}{\lambda^2}=} = 50\cdot 0.1^2 = 0.5$ km^2

b. $P(5 < Y < 5.2) = P\left(\frac{5-5}{\sqrt{0.5}} < \frac{Y-5}{\sqrt{0.5}} < \frac{5.2-5}{\sqrt{0.5}}\right) =$

$= \Phi(0.28) - \Phi(0) \approx 0.6103 - 0.5 \approx 0.11$

3.



a) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

$-1 \le x \le 0$: $\int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left(1+x-(-1-x)\right) = 1+x$

$0 \le x \le 1$: $\int_{-1+x}^{1-x} \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left(1-x-(-1+x)\right) = 1-x$

pss för y.

b) $E(X) = \int_0^1 x\cdot(1-x)\,dx + \int_{-1}^{0} x\cdot(1+x)\,dx =$

$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 0$

pss för y.

Inses för övrigt pga symmetri!

c) Beroende, inses via området utseende.

Även

$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$

4. $X \sim bin(n,p)$, p okänd

x observation av X

(a) ML-skatta p

$L(p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$l(p) = \log L(p) = \log \binom{n}{x} + x \cdot \log p + (n-x)\log(1-p)$

$l'(p) = \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} = \frac{(1-p)x - p(n-x)}{p(1-p)}$

$= \frac{x - p(n+x-x)}{p(1-p)} = \frac{x - n \cdot p}{p(1-p)}$

$l'(\hat{p}) = 0$ ger $x - n \cdot \hat{p} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{x}{n}$

Är $\hat{p} = x/n$ max?

		$\hat{p} = x/n$	
$x - n \cdot p$	+	0	−
$p(1-p)$	+	+	+
	$\nearrow$		$\searrow$

Ja, se tabell $\rightarrow$

ML-skattaren $p^* = \frac{X}{n}$

(b) $Var(X) = n \cdot p(1-p)$

Enligt variansprincipen för ML fås ML-skattningen genom att sätta in ML-skattningen av p från (a) i uttrycket, dvs

$\widehat{Var(X)} = n \cdot \hat{p}(1-\hat{p}) = x - \frac{x^2}{n}$

(c) En skattare θ^* av θ är väntevärdesriktig om $E[\theta^*] = \theta \quad \forall \theta$

1. $E[p^*] = E[\frac{X}{n}] = \frac{E[X]}{n} = \frac{n \cdot p}{n} = p$ V.V.R

($E[X] = n \cdot p$ då $X \sim bin(n,p)$)

2. $E[Var(X)^*] = E[X - \frac{X^2}{n}]$

$= E[X] - \frac{E[X^2]}{n} = E[X] - \frac{Var(X) + (E[X])^2}{n}$

$= n \cdot p - p(1-p) + n \cdot p^2$

$= np(1-p) + p(2np + p - 1) \neq np(1-p)$

då $p \in (0,1]$

5. $X = \begin{cases} 1 & \text{om född i kvartal } 1 \\ 2 & \text{— '' —} \quad 2 \\ 3 & \text{— '' —} \quad 3 \\ 4 & \text{— '' —} \quad 4 \end{cases}$

Vi testar

H_0: $X \sim \text{uni}(1,2,3,4)$

dvs $P(X = i) = 1/4$, $i = 1,2,3,4$

mot

H_1: H_0 inte sann

$\#(X = i)$	1	2	3	4
E: förväntat	10	10	10	10
O: observerat	9	12	12	7

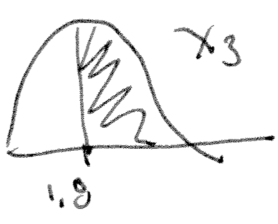
$E_i \geq 5$ $i = 1,2,3,4$ så

$$Q = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{\text{appr}}{\sim} \chi^2_{4-1}$$

då H_0 sann.

Uträkning ger

$$q = \frac{(9-10)^2 + (12-10)^2 + (12-10)^2 + (7-10)^2}{10} = 1,8$$



$1,8 < 6,251 = \chi^2_{0,1;\,3}$

Vi kan inte förkasta H_0 på någon rimlig signifikansnivå.

6. (a) Vi konstruerar ett nedåt begränsat konfidensintervall för $\mu_X - \mu_Y$

n_X, n_Y hyfsat stora så $\bar{X}, \bar{Y}$ approximativt normalfördelade. Vi bildar ett tvåstickprovs-konfidensintervall baserat på t-fördelningen

$\alpha = 0.05$

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - t_{0.05,\nu} \sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}} , \infty \right)$$

$$\nu = \left\lfloor \frac{\left(\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y} \right)^2}{\frac{(s_x^2/n_x)^2}{n_x - 1} + \frac{(s_y^2/n_y)^2}{n_y - 1}} \right\rfloor = 49$$

$$= \left(14{,}49 - 12{,}79 - 1{,}676 \sqrt{\frac{13{,}18}{38} - \frac{9{,}35}{34}} , \infty \right)$$

$$= (0{,}429, \infty)$$

(b) $H_0: \mu_X = \mu_Y$

mot

$H_1: \mu_X > \mu_Y$

på nivå $\alpha = 0.05$

Eftersom intervallet i (a) enbart innehåller positiva värden hade testet förkastat H_0 till förmån för H_1.

(c)

Nivån $\alpha = P(\text{typ I-fel})$

styrkan $1 - \beta = 1 - P(\text{typ II-fel})$